Exemple 13 Sachant que dét $A = 4$, évaluons dét (A^5) et dét (A^{10}).

$$\text{dét}(A^5) = (\text{dét}\,A)^5 \quad \text{(théorème 3.15)}$$
$$= 4^5 = 1024$$

$$\text{dét}(A^{10}) = (\text{dét}\,A)^{10} \quad \text{(théorème 3.15)}$$
$$= 4^{10} = 1\,048\,576$$

Rang d'une matrice

La notion de rang d'une matrice peut être utilisée pour déterminer si un système d'équations linéaires est compatible ou incompatible.

DÉFINITION 3.8 Soit la matrice $A_{m \times n}$. Une **sous-matrice** de A est une matrice obtenue en supprimant un nombre quelconque de lignes ou de colonnes de A.

Exemple 1 Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) En supprimant la première ligne et la troisième colonne de A,

c'est-à-dire $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, nous obtenons la sous-matrice $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

b) En supprimant la première et la troisième ligne de B,

c'est-à-dire $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, nous obtenons la sous-matrice $B_1 = [\,0 \;\; 7\,]$

DÉFINITION 3.9 1) Le **rang** d'une matrice non nulle $A_{m \times n}$, noté rang (A), est égal à l'ordre de la plus grande sous-matrice carrée dont le déterminant est différent de zéro.

2) Le **rang** d'une matrice nulle $O_{m \times n}$, est égal à zéro, c'est-à-dire rang $(O_{m \times n}) = 0$.

Remarque rang $(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$

Pour déterminer le rang d'une matrice, il faut parfois calculer plusieurs déterminants.

Exemple 2 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Déterminons le rang de A.

Étape 1 En calculant d'abord dét A développé selon les éléments de la deuxième ligne de A, nous obtenons

$$\text{dét}\,A = 0 + 0 - 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -5(0) = 0$$

Puisque dét $A = 0$, alors rang $(A) \neq 3$, donc rang $(A) \leq 2$

Étape 2 Calculons le déterminant de sous-matrices carrées d'ordre 2.

En supprimant la première ligne et la troisième colonne de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$,

nous obtenons $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, où $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

En supprimant la première ligne et la première colonne de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$,

nous obtenons $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, où $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$

D'où rang $(A) = 2$ (car dét $A_2 \neq 0$)

b) Déterminons rang (B).

Étape 1 Calculons d'abord dét B.

$$\begin{aligned} \text{dét } B &= 2(-1)(3)(5) \quad \text{(théorème 3.3)} \\ &= -30 \end{aligned}$$

Puisque dét $B = -30 \neq 0$, alors rang $(B) = 4$ (car dét $B \neq 0$)

c) Déterminons le rang de C.

rang $(C) = 0$ (définition 3.9, où $C = O_{2 \times 3}$)

Exemple 3 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 13 & 7 & 10 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Déterminons rang (A).

Étape 1 Supprimons d'abord deux colonnes de A pour obtenir des sous-matrices carrées d'ordre 3 et calculons le déterminant de ces sous-matrices.

En supprimant les deux dernières colonnes de A, nous obtenons

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 13 \end{bmatrix}, \text{ où dét } A_1 = 0$$

En supprimant les deux premières colonnes de A, nous obtenons

$$A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & -2 \\ 13 & 7 & 10 \end{bmatrix}, \text{ où dét } A_2 = 0$$

L'élève peut vérifier que les déterminants des huit autres sous-matrices carrées d'ordre 3, obtenues en supprimant deux colonnes de A, sont égaux à 0.

Ainsi, rang $(A) \neq 3$, donc rang $(A) \leq 2$

Étape 2 Supprimons trois colonnes et une ligne de A pour obtenir des sous-matrices carrées d'ordre 2.

En supprimant les trois dernières colonnes et la troisième ligne de A, nous obtenons

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ où dét } A_3 = 0$$

En supprimant les trois premières colonnes et la troisième ligne de A, nous obtenons

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ où dét } A_4 = -6 \neq 0$$

D'où rang $(A) = 2$ (car dét $A_4 \neq 0$)

b) Déterminons rang (B).

Puisque B possède deux lignes contenant uniquement des 0, le déterminant de B est 0, et le déterminant de toutes les sous-matrices carrées d'ordre 5 est également 0.

Ainsi, rang $(B) \leq 4$

En choisissant comme sous-matrice la matrice formée des éléments ombrés de B, c'est-à-dire

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ où dét} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = (-1)(7)(1)(-4) = 28 \neq 0$$

d'où rang $(B) = 4$

Énonçons maintenant un théorème qui nous permettra de déterminer le rang d'une matrice plus rapidement.

THÉORÈME 3.16 Soit A, une matrice quelconque. Si A_e est une matrice échelonnée obtenue de A à l'aide d'opérations élémentaires, alors

1) rang $(A) =$ rang (A_e);

2) le rang de A est égal au nombre de lignes non nulles d'une matrice échelonnée équivalente à A.

Remarque Le nombre de lignes non nulles d'une matrice échelonnée est égal au nombre de pivots de cette matrice échelonnée.

Exemple 4

a) Déterminons le rang de la matrice A de l'exemple 3 a) précédent à l'aide du théorème 3.16.

Transformons la matrice A en une matrice échelonnée équivalente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 13 & 7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ 3L_3 + L_2 \to L_3 \end{matrix}$$

Puisque le nombre de lignes non nulles de la matrice échelonnée équivalente à A est 2, cette matrice échelonnée possède deux pivots, soit 1 et -9,

d'où rang $(A) = 2$.

b) Déterminons le rang de la matrice A précédente à l'aide de Maple.

```
> with(linalg):
> A:=matrix(3,5,[1,2,5,3,4,1,2,-4,0,-2,2,4,13,7,10]):
> rank(A);
                2
```

Le nombre de solutions d'un système d'équations linéaires, écrit sous la forme matricielle $AX = B$, peut être déterminé en comparant le rang de la matrice des coefficients, rang (A), le rang de la matrice augmentée, rang $(A \mid B)$, et le nombre n d'inconnues.

Par exemple, pour un système d'équations linéaires de trois équations à trois inconnues, nous obtenons, après avoir échelonné la matrice augmentée, une des situations suivantes, où les éléments $\blacksquare$ sont différents de zéro.

Système compatible		Système incompatible
$\left[\begin{array}{ccc\|c} \blacksquare & \square & \square & \square \\ 0 & \blacksquare & \square & \square \\ 0 & 0 & \blacksquare & \square \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} \blacksquare & \square & \square & \square \\ 0 & \blacksquare & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} \blacksquare & \square & \square & \square \\ 0 & \blacksquare & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array}\right]$
rang (A) = rang $(A \mid B) = 3$	rang (A) = rang $(A \mid B) = 2$ où $2 < 3$	rang $(A) = 2$ rang $(A \mid B) = 3$ d'où rang (A) < rang $(A \mid B)$
solution unique	infinité de solutions	aucune solution

De façon générale, pour un système de m équations linéaires à n inconnues que nous pouvons écrire sous la forme matricielle $AX = B$, nous avons le tableau suivant.

Système compatible		Système incompatible
Si rang (A) = rang $(A \mid B)$		Si rang (A) < rang $(A \mid B)$
lorsque rang $(A) = n$	lorsque rang $(A) < n$	
solution unique	infinité de solutions	aucune solution

Exercices 3.2

1. Sans calculer les déterminants, déterminer si les égalités suivantes sont vraies (V) ou fausses (F) pour $a, b, c, \ldots, z \in \mathbb{R}$. Justifier les réponses.

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 10 \\ 3 & 10 & 6 \\ 2 & -7 & 15 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & c \\ 2 & 1 & 3 \\ y & x & z \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ kd & ke & kf \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 25 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 25\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & b+2 & c+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ x-1 & y-2 & z-3 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ a+1 & b+2 & c+3 \end{vmatrix} = 0$