TD d'algèbre linéaire

Série 1 : Opérations sur les matrices

Ex. 1 —

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1. Calculer AX.
2. Quelles sont le conditions à vérifier pour avoir l'égalité $AX = B$.

Answer (Ex. 1) —

1. Calcul de AX :

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 5y \\ 7x + 8y \end{pmatrix}$$

2. Conditions à vérifier pour avoir l'égalité $AX = B$:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - 5y \\ 7x + 8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y & = & 6 \\ 7x + 8y & = & -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \frac{43}{51} \\ y & = -\frac{44}{51} \end{cases}$$

Pour avoir l'égalité $AX = B$ il faut que $x = \frac{43}{51}$ et $y = -\frac{44}{51}$.

Ex. 2 —

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $3A + 2B - I_2$.
2. Calculer A^n et B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Answer (Ex. 2) —

1. Calcul de $3A + 2B - I_2$:

$$\begin{aligned}
3A + 2B - I_2 &= 3 \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times (-1) \\ 3 \times (-1) & 3 \times 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 1 \\ 2 \times 0 & 2 \times 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Calcul de A^n et B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   a) Calcul de A^n :

$$\begin{aligned}
A^2 = A.A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2A \\
A^3 &= A^2.A = (2A).A = 2A^2 = 2 \times (2A) = 2^2 A \\
A^4 &= A^3.A = (2^2 A).A = 2^2 A^2 = 2^2 \times (2A) = 2^3 A
\end{aligned}$$

On remarque que la puissance n de la matrice A s'écrit :

$$A^n = 2^{n-1} A \tag{1}$$

Cette relation doit être démontrée par récurrence :

i – Vérification de $A^n = 2^{n-1} A$ pour $n = 1$:

$$A^1 = 2^0 A = A$$

La relation (1) est bien vérifiée pour $n = 1$.

ii – On suppose que l'expression $A^n = 2^{n-1} A$ est vraie et l'on démontre que :

$$A^{n+1} = 2^n A \tag{2}$$

Pour cela, il suffit de décomposer la puissance A^{n+1} pour faire apparaître la puissance A^n et la remplacer par son expression que l'on a supposée vraie :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n.A \\
&= 2^{n-1}A.A \\
&= 2^{n-1}A^2 \\
&= 2^{n-1}(2A) \\
&= (2^{n-1} \times 2)A \\
A^{n+1} &= 2^n A
\end{aligned}$$

Au final, on a $A^n = 2^{n-1}A = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel non nul n.

b) Calcul de B^n :

$$B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^2 - 1 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2.B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^3 - 1 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^3.B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^4 - 1 \\ 0 & 2^4 \end{pmatrix}$$

On constate que la puissance n de la matrice s'écrit :

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \tag{3}$$

Cette relation doit être démontrée par récurrence :

i – Vérification de la relation (3) pour $n = 1$:

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B$$

Ainsi, l'expression (3) est bien vérifiée pour $n = 1$.

ii – On suppose que $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ est vraie et l'on démontre que :

$$B^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Il convient pour cela de décomposer la puissance B^{n+1} afin de faire apparaître la puissance B^n et de la remplacer par son expression que l'on a supposée vraie :

$$B^{n+1} = B^n.B = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + 2(2^n - 1) \\ 0 & 2 \times 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Enfin, on a $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel non nul n.

Ex. 3 —
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^3 et en déduire $(I_3 + A)^3$.
2. Calculer $(I_3 + A)^n, \forall n \geq 3$.

Answer (Ex. 3) —

1. Calcul de A^3 :
   La puissance 2 de la matrice A est obtenue comme suit :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+\sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & -1+\cos^2\theta & \sin\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta & \cos^2\theta+\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

En utilisant la relation trigonométrique $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, le résultat précédent se simplifie comme suit :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 1 \end{pmatrix}$$

De la même manière, on calcule la puissance 3 de la matrice A :

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Contrairement à sa puissance 2, la puissance 3 de la matrice A est nulle, il s'agit donc d'une *matrice nilpotente d'indice 3.*

Déduction de $(I_3 + A)^3$:
Les matrices A et I_3 commutent puisque par définition de l'élément neutre du produit matriciel on a $AI_3 = I_3AI_3$. Par conséquence, l'expression $(I_3+A)^3$ peut être développée selon la formule du binôme de Newton comme suit :

$$\begin{aligned} (I_3 + A)^3 &= (A + I_3)^3 \\ &= C_3^0 A^3 I_3^0 + C_3^1 A^2 I_3^1 + C_3^2 A^1 I_3^2 + C_3^3 A^0 I_3^3 \\ &= 1A^3 I_3 + 3A^2 I_3 + 3AI_3 + 1I_3 I_3 \\ &= A^3 + 3A^2 + 3A + I_3 \\ &= 3A^2 + 3A + I_3 \end{aligned}$$

2. Calcul de $(I_3 + A)^n$ pour tout $n \geq 3$:
   Plus généralement, la formule du binôme de Newton peut être utilisée pour développer $(I_3+A)^n$ pour tout $n \geq 3$. Pour simplifier l'écriture, tous les termes qui contiennent des puissances

supérieures ou égales à 3 de la matrice A seront omis étant donné que celles-ci sont nulles :

$$\begin{aligned}(I_3 + A)^n &= C_n^0 I_3^n A^0 + C_n^1 I_3^{n-1} A^1 + C_n^2 I_3^{n-2} A^2 \\ &= 1 I_3 I_3 + n I_3 A + \frac{n(n-1)}{2} I_3 A^2 \\ &= I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2\end{aligned}$$

Ex. 4 — **Examen de l'année 2015/2016 - Session 1 - Groupes A et C**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Trouver une matrice B symétrique et une matrice C antisymétrique telles que $A = B + C$.

Answer (Ex. 4) —

La matrice A est une matrice de taille 3×3. Par conséquent, les matrices B et C dont elle est la somme sont également des matrices de même taille 3×3. C'est à dire, elles se présentent comme suit :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

La matrice B est symétrique si et seulement si $b_{21} = b_{12}$, $b_{31} = b_{13}$ et $b_{32} = b_{23}$ et la matrice C est anti-symétrique si et seulement si $c_{21} = -c_{12}$, $c_{31} = -c_{13}$, $c_{32} = -c_{23}$ et $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0$. Sous ces conditions, les matrices B et C s'écrivent :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

L'addition des matrices B et C donne :

$$B + C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} + c_{12} & b_{13} + c_{13} \\ b_{12} - c_{12} & b_{22} & b_{23} + c_{23} \\ b_{13} - c_{13} & b_{23} - c_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'égalité $A = B + C$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} + c_{12} & b_{13} + c_{13} \\ b_{12} - c_{12} & b_{22} & b_{23} + c_{23} \\ b_{13} - c_{13} & b_{23} - c_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

En égalisant les éléments correspondants de la matrice A et de la matrice $B + C$, on obtient les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} b_{11} &= & 1 \\ b_{22} &= & -1 \\ b_{33} &= & 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_{12} + c_{12} &= & 2 \\ b_{12} - c_{12} &= & 3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_{13} + c_{13} &= & 4 \\ b_{13} - c_{13} &= & 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_{23} + c_{23} &= & 3 \\ b_{23} - c_{23} &= & 2 \end{cases}$$

La résolution de ces systèmes permet de déterminer les éléments des matrices B et C :

$$\begin{cases} b_{11} &= & 1 \\ b_{22} &= & -1 \\ b_{33} &= & 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2b_{12} &= & 5 \\ c_{12} &= & 2 - b_{12} \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2b_{13} &= & 9 \\ c_{13} &= & 4 - b_{13} \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2b_{23} &= & 5 \\ c_{23} &= & 3 - b_{23} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} b_{11} &= & 1 \\ b_{22} &= & -1 \\ b_{33} &= & 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_{12} &= & \frac{5}{2} \\ c_{12} &= & -\frac{1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_{13} &= & \frac{9}{2} \\ c_{13} &= & -\frac{1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_{23} &= & \frac{5}{2} \\ c_{23} &= & \frac{1}{2} \end{cases}$$

Finalement, les matrices B et C recherchées sont respectivement données par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

On note bien que la matrice B est symétrique et que la matrice C est anti-symétrique. Il ne reste plus qu'à vérifier que leur somme est égale à la matrice A :

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Ex. 5 — **Examen de l'année 2015/2016 - Session 1 - Groupes B et D**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Trouver une matrice B symétrique et une matrice C antisymétrique telles que $A = B + C$.

Answer (Ex. 5) —

La matrice A est une matrice de taille 3×3. Par conséquent, les matrices B et C dont elle est la somme sont également des matrices de même taille 3×3. C'est à dire, elles se présentent comme suit :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

La matrice B est symétrique si et seulement si $b_{21} = b_{12}$, $b_{31} = b_{13}$ et $b_{32} = b_{23}$ et la matrice C est anti-symétrique si et seulement si $c_{21} = -c_{12}$, $c_{31} = -c_{13}$, $c_{32} = -c_{23}$ et $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0$. Sous ces conditions, les matrices B et C s'écrivent :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

L'addition des matrices B et C donne :

$$B + C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} + c_{12} & b_{13} + c_{13} \\ b_{12} - c_{12} & b_{22} & b_{23} + c_{23} \\ b_{13} - c_{13} & b_{23} - c_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'égalité $A = B + C$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} + c_{12} & b_{13} + c_{13} \\ b_{12} - c_{12} & b_{22} & b_{23} + c_{23} \\ b_{13} - c_{13} & b_{23} - c_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

En égalisant les éléments correspondants de la matrice A et de la matrice $B + C$, on obtient les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} b_{11} &= 4 \\ b_{22} &= -3 \\ b_{33} &= 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_{12} + c_{12} &= 2 \\ b_{12} - c_{12} &= 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_{13} + c_{13} &= 1 \\ b_{13} - c_{13} &= 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_{23} + c_{23} &= 1 \\ b_{23} - c_{23} &= 5 \end{cases}$$

La résolution de ces systèmes permet de déterminer les éléments des matrices B et C :

$$\begin{cases} b_{11} &= 4 \\ b_{22} &= -3 \\ b_{33} &= 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2b_{12} &= 3 \\ c_{12} &= 2 - b_{12} \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2b_{13} &= 2 \\ c_{13} &= 1 - b_{13} \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2b_{23} &= 6 \\ c_{23} &= 1 - b_{23} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} b_{11} &= 4 \\ b_{22} &= -3 \\ b_{33} &= 2 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} b_{12} &= \frac{3}{2} \\ c_{12} &= \frac{1}{2} \end{cases} \; ; \; \begin{cases} b_{13} &= 1 \\ c_{13} &= 0 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} b_{23} &= 3 \\ c_{23} &= -2 \end{cases}$$

Finalement, les matrices B et C recherchées sont respectivement données par :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On note bien que la matrice B est symétrique et que la matrice C est anti-symétrique. Il ne reste plus qu'à vérifier que leur somme est égale à la matrice A :

$$B + C = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = A$$

Ex. 6 — Examen de l'année 2016/2017 - Session 2 - Groupes A et C

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Trouver une matrice B symétrique et une matrice C antisymétrique telles que $A = B + C$.

Answer (Ex. 6) —

La matrice A est une matrice de taille 3×3. Par conséquent, les matrices B et C dont elle est la somme sont également des matrices de même taille 3×3. C'est à dire, elles se présentent comme suit :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

La matrice B est symétrique si et seulement si $b_{21} = b_{12}$, $b_{31} = b_{13}$ et $b_{32} = b_{23}$ et la matrice C est anti-symétrique si et seulement si $c_{21} = -c_{12}$, $c_{31} = -c_{13}$, $c_{32} = -c_{23}$ et $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0$. Sous ces conditions, les matrices B et C s'écrivent :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

L'addition des matrices B et C donne :

$$B + C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} + c_{12} & b_{13} + c_{13} \\ b_{12} - c_{12} & b_{22} & b_{23} + c_{23} \\ b_{13} - c_{13} & b_{23} - c_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'égalité $A = B + C$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} + c_{12} & b_{13} + c_{13} \\ b_{12} - c_{12} & b_{22} & b_{23} + c_{23} \\ b_{13} - c_{13} & b_{23} - c_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

En égalisant les éléments correspondants de la matrice A et de la matrice $B + C$, on obtient les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} b_{11} & = & 6 \\ b_{22} & = & -1 \\ b_{33} & = & 8 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} b_{12} + c_{12} & = & 9 \\ b_{12} - c_{12} & = & 4 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} b_{13} + c_{13} & = & 3 \\ b_{13} - c_{13} & = & 2 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} b_{23} + c_{23} & = & 5 \\ b_{23} - c_{23} & = & 7 \end{cases}$$

La résolution de ces systèmes permet de déterminer les éléments des matrices B et C :

$$\begin{cases} b_{11} & = & 6 \\ b_{22} & = & -1 \\ b_{33} & = & 8 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} 2b_{12} & = & 13 \\ c_{12} & = & 9 - b_{12} \end{cases} \; ; \; \begin{cases} 2b_{13} & = & 5 \\ c_{13} & = & 3 - b_{13} \end{cases} \; ; \; \begin{cases} 2b_{23} & = & 12 \\ c_{23} & = & 5 - b_{23} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} b_{11} &= 6 \\ b_{22} &= -1 \\ b_{33} &= 8 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_{12} &= \frac{13}{2} \\ c_{12} &= \frac{5}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_{13} &= \frac{5}{2} \\ c_{13} &= \frac{1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_{23} &= 6 \\ c_{23} &= -1 \end{cases}$$

Finalement, les matrices B et C recherchées sont respectivement données par :

$$B = \begin{pmatrix} 6 & \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} & -1 & 6 \\ \frac{5}{2} & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note bien que la matrice B est symétrique et que la matrice C est anti-symétrique. Il ne reste plus qu'à vérifier que leur somme est égale à la matrice A :

$$B + C = \begin{pmatrix} 6 & \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} & -1 & 6 \\ \frac{5}{2} & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix} = A$$

Ex. 7 — Examen de l'année 2014/2015 - Session 1 - Groupes A et B

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Trouver l'ensemble des matrices B telles que $BA = I_2$.

Answer (Ex. 7) —

La matrice B doit être de taille 2×3 pour que le produit matriciel soit réalisable et de même taille que la matrice I_2. La matrice B se présente comme suit :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel BA est alors donné par :

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+3b_{12}-b_{13} & 2b_{11}+4b_{12}+4b_{13} \\ b_{21}+3b_{22}-b_{23} & 2b_{21}+4b_{22}+4b_{23} \end{pmatrix}$$

L'égalité de ce produit matriciel avec la matrice identité I_2 s'exprime sous forme d'un système d'équations à résoudre :

$$BA = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} b_{11}+3b_{12}-b_{13} &= 1 \\ 2b_{11}+4b_{12}+4b_{13} &= 0 \\ b_{21}+3b_{22}-b_{23} &= 0 \\ 2b_{21}+4b_{22}+4b_{23} &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} &= 1-3b_{12}+b_{13} \\ b_{11} &= -2b_{12}-2b_{13} \\ b_{21} &= b_{23}-3b_{22} \\ b_{21} &= \frac{1}{2}-2b_{22}-2b_{23} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} &= 1-3b_{12}+b_{13} \\ 1-3b_{12}+b_{13} &= -2b_{12}-2b_{13} \\ b_{21} &= b_{23}-3b_{22} \\ b_{23}-3b_{22} &= \frac{1}{2}-2b_{22}-2b_{23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} &= 1-3b_{12}+b_{13} \\ b_{12} &= 1+3b_{13} \\ b_{21} &= b_{23}-3b_{22} \\ b_{23} &= \frac{1}{6}+\frac{1}{3}b_{22} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} &= 1-3(1+3b_{13})+b_{13} \\ b_{12} &= 1+3b_{13} \\ b_{21} &= \frac{1}{6}+\frac{1}{3}b_{22}-3b_{22} \\ b_{23} &= \frac{1}{6}+\frac{1}{3}b_{22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} &= -2-8b_{13} \\ b_{12} &= 1+3b_{13} \\ b_{21} &= \frac{1}{6}-\frac{8}{3}b_{22} \\ b_{23} &= \frac{1}{6}+\frac{1}{3}b_{22} \end{cases}$$

Ainsi, la forme générale de la matrice B est :

$$B = \begin{pmatrix} -2-8b_{13} & 1+3b_{13} & b_{13} \\ \frac{1}{6}-\frac{8}{3}b_{22} & b_{22} & \frac{1}{6}+\frac{1}{3}b_{22} \end{pmatrix} \ , \ \forall b_{13}, b_{22} \in \mathbb{R}$$

ou encore :

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8b_{13} & 3b_{13} & b_{13} \\ -\frac{8}{3}b_{22} & b_{22} & \frac{1}{3}b_{22} \end{pmatrix} \ , \ \forall b_{13}, b_{22} \in \mathbb{R}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que cette matrice a bien la forme générale adéquate :

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8x & 3x & x \\ -\frac{8}{3}y & y & \frac{1}{3}y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2$$

On a bien $BA = I_2$.

Ex. 8 — Examen de l'année 2014/2015 - Session 1 - Groupes C et D

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Trouver l'ensemble des matrices B telles que $AB = BA$.

Answer (Ex. 8) —

Pour que les matrices A et B commutent (i.e.$AB = BA$), il faut que les deux matrices soient carrées et de même taille. Par conséquent, la matrice B est une matrice carrée d'ordre 2, elle se présente comme suit :

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Les produits matriciels AB et BA sont respectivement donnés par :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix}$$

Leur égalité est équivalente à un système d'équations à résoudre :

$$AB = BA \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a+2c & = & a+3b \\ b+2d & = & 2a+4b \\ 3a+4c & = & c+3d \\ 3b+4d & = & 2c+4d \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2c & = & 3b \\ 2d & = & 2a+3b \\ 3a+3c & = & 3d \\ 3b & = & 2c \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c &= 3b \\ d &= a+\frac{3}{2}b \\ a+c &= d \\ 2c &= 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c &= \frac{3}{2}b \\ d &= a+\frac{3}{2}b \\ d &= a+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c &= \frac{3}{2}b \\ d &= a+\frac{3}{2}b \\ d &= a+\frac{3}{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c &= \frac{3}{2}b \\ d &= a+\frac{3}{2}b \end{cases}$$

Ainsi, la forme générale de la matrice B est :

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{3}{2}b & a+\frac{3}{2}b \end{pmatrix} \ , \ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{3}{2}b & a+\frac{3}{2}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{3}{2}b & \frac{3}{2}b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}b\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = aI_2 + \frac{3}{2}bJ$$

avec $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que la matrice B a bien la forme générale adéquate :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{3}{2}b & a+\frac{3}{2}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ 3a+6b & 4a+9b \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{3}{2}b & a+\frac{3}{2}b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ 3a+6b & 4a+9b \end{pmatrix}$$

On a bien $AB = BA$.

Ex. 9 — Examen de l'année 2016/2017 - Session 2 - Groupes B et D

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la forme générale de la matrice B telle que $AB = BA$;
2. Calculer x et y tels que $B = xI + yJ$.

Answer (Ex. 9) —

1. Forme générale de la matrice B telle que $AB = BA$:
   Pour que les matrices A et B commutent (i.e.$AB = BA$), il faut que les deux matrices soient carrées et de même taille. Par conséquent, la matrice B est une matrice carrée d'ordre 2, elle se présente comme suit :
   $$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
   Les produits matriciels AB et BA sont respectivement donnés par :
   $$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix}$$
   $$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a & 2b \\ d - c & 2d \end{pmatrix}$$
   Leur égalité est équivalente à un système d'équations à résoudre :
   $$AB = BA \Leftrightarrow \begin{cases} b - a & = & -a \\ 2b & = & -b \\ a + 2c & = & d - c \\ 2d & = & b + 2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b & = & 0 \\ b & = & 0 \\ d & = & a + 3c \\ b & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b & = & 0 \\ d & = & a + 3c \end{cases}$$
   Ainsi, la forme générale de la matrice B est :
   $$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a + 3c \end{pmatrix} \ , \ \forall a, c \in \mathbb{R}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que la matrice B a bien la forme générale adéquate :

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a+3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ a+2c & 2a+6c \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a+3c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ a+2c & 2a+6c \end{pmatrix}$$

On a bien $AB = BA$.

2. Calcul de x et y tels que $B = xI + yJ$:

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a+3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 3c \end{pmatrix}$$
$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = aI + 3cJ$$

Ainsi les valeurs de x et y qui vérifient $B = xI + yJ$ sont respectivement a et $3c$ avec $a, c \in \mathbb{R}$.

Ex. 10 — Examen de l'année 2014/2015 - Session 1 - Groupes C et D

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2 et B^3 puis déduire $B^n, \forall n \in \mathbb{N}$;
2. Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme de Newton et simplifier.
3. En déduire $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Answer (Ex. 10) —

La matrice B est donnée par :

$$B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcul de B^2 et B^3 et déduction de $B^n, \forall n \in \mathbb{N}$:

a) Calcul de B^2 :

$$B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcul de B^3 :

$$B^3 = B^2.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

Les puissances de la matrice B s'annulent à partir de la puissance 3. La matrice B est nilpotente d'indice 3.

c) Déduction de $B^n, \forall n \geq 4$:

$$B^n = B^{n-3}.B^3 = B^{n-3}.O_3 = O_3$$

2. Développement de $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme de Newton :
Les matrices B et I_3 commutent car $BI_3 = I_3B$, la formule du binôme de Newton peut être utilisée :

$$\begin{aligned} (B + I_3)^n &= (I_3 + B)^n \\ &= C_n^0 I_3^n B^0 + C_n^1 I_3^{n-1} B^1 + C_n^2 I_3^{n-2} B^2 \\ &= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \end{aligned}$$

3. Déduction de $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} B = A - I_3 &\Leftrightarrow A = B + I_3 \\ &\Leftrightarrow A^n = (B + I_3)^n \\ &\Leftrightarrow A^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \end{aligned}$$

Ex. 11 — **Examen de l'année 2014/2015 - Session 2 - Groupes A et B**

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_4$.

1. Calculer B^2, B^3 et B^4 puis déduire $B^n, \forall n \in \mathbb{N}$;
2. Développer $(B + I_4)^n$ par la formule du binôme de Newton et simplifier.
3. En déduire $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Answer (Ex. 11) —
Calcul de la matrice B :

$$B = A - I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcul de B^2, B^3 et B^4 et déduction $B^n, \forall n \in \mathbb{N}$:
   a) Calcul de B^2 :

$$B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   b) Calcul de B^3 :

$$B^3 = B^2.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Calcul de B^4 :

$$B^4 = B^3.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_4$$

Les puissances de la matrice B s'annulent à partir de la puissance 4. B est une matrice nilpotente d'indice 4.

d) Déduction de $B^n, \forall n \geq 5$:

$$B^n = B^{n-4}.B^4 = B^{n-4}.O_4 = O_4$$

2. Développement de $(B + I_4)^n$ par la formule du binôme de Newton :
Les matrices B et I_4 commutent puisque $BI_4 = I_4B$, on peut donc utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(B + I_4)^n &= (I_4 + B)^n \\ &= C_n^0 I_4^n B^0 + C_n^1 I_4^{n-1} B^1 + C_n^2 I_4^{n-2} B^2 + C_n^3 I_4^{n-3} B^3 \\ &= I_4 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} B^3\end{aligned}$$

3. Déduction de $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}B = A - I_4 &\Leftrightarrow A = B + I_4 \\ &\Leftrightarrow A^n = (B + I_4)^n \\ &\Leftrightarrow A^n = I_4 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} B^3\end{aligned}$$

Ex. 12 — Examen de l'année 2016/2017 - Session 1 - Groupes B et D

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I_3$.

1. Calculer B^2 et B^3 puis déduire $B^n, \forall n \in \mathbb{N}$;
2. Développer $(B + 2I_3)^n$ par la formule du binôme de Newton et simplifier.
3. En déduire $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Answer (Ex. 12) —
Calcul de la matrice B :

$$B = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcul de B^2 et B^3 et déduction de $B^n, \forall n \in \mathbb{N}$:
   a) Calcul de B^2 :
   $$B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   b) Calcul de B^3 :
   $$B^3 = B^2.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$
   Les puissances de la matrice B s'annulent à partir de la puissance 3. Il s'agit donc d'une matrice nilpotente d'indice 3.
   c) Déduction de $B^n, \forall n \geq 4$:
   $$B^n = B^{n-3}.B^3 = B^{n-3}.O_3 = O_3$$
2. Développement de $(B + 2I_3)^n$ par la formule du binôme de Newton :
   Vérification de la commutativité du produit matriciel des matrices B et $2I_3$:
   $$B(2I_3) = 2(BI_3)$$
   $$(2I_3)B = 2(I_3B)$$

Comme $BI_3 = I_3B$ alors $2(BI_3) = 2(I_3B)$ et subséquemment $B(2I_3) = (2I_3)B$. On conclut que les matrices B et $2I_3$ commutent et l'on peut appliquer la formule du binôme de Newton comme suit :

$$\begin{aligned}(B + 2I_3)^n &= (2I_3 + B)^n \\ &= C_n^0(2I_3)^n B^0 + C_n^1(2I_3)^{n-1}B^1 + C_n^2(2I_3)^{n-2}B^2 \\ &= 1(2^n)I_3^n I_3 + n2^{n-1}I_3^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}I_3^{n-2}B^2 \\ &= 2^n I_3 I_3 + n2^{n-1}I_3 B + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}I_3B^2 \\ &= 2^n I_3 + n2^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}B^2\end{aligned}$$

3. Déduction de $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}B = A - 2I_3 &\Leftrightarrow A = B + 2I_3 \\ &\Leftrightarrow A^n = (B + 2I_3)^n \\ &\Leftrightarrow A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}B^2\end{aligned}$$

Ex. 13 — **Examen de l'année 2014/2015 - Session 2 - Groupes C et D**

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + I_4$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4 puis déduire $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$;
2. Développer $(A + I_4)^n$ par la formule du binôme de Newton et simplifier.
3. En déduire $B^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Answer (Ex. 13) —

1. Calcul de A^2, A^3 et de A^4 et déduction de $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$:

a) Calcul de A^2 :

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcul de A^3 :

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Calcul de A^4 :

$$A^4 = A^3.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_4$$

Les puissances de la matrice A s'annulent à partir de la puissance 4. Il s'agit d'une matrice nilpotente d'indice 4.

d) Déduction de $A^n, \forall n \geq 5$:

$$A^n = A^{n-4}.A^4 = A^{n-4}.O_4 = O_4$$

2. Développement de $(A+I_4)^n$ par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(A+I_4)^n &= (I_4+A)^n \\ &= C_n^0 I_4^n A^0 + C_n^1 I_4^{n-1} A^1 + C_n^2 I_4^{n-2} A^2 + C_n^3 I_4^{n-3} A^3 \\ &= I_4 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} A^3\end{aligned}$$

3. Déduction de $B^n, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}B = A + I_4 &\Leftrightarrow B^n = (A+I_4)^n \\ &\Leftrightarrow B^n = I_4 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} A^3\end{aligned}$$

Ex. 14 — Examen (modifié) de l'année 2016/2017 - Session 1 - Groupes A et C

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -31 & 24 \\ -40 & 31 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M = P^{-1}AP$.
2. Calculer M^2 et M^3 puis déduire $M^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Answer (Ex. 14) —

1. Calcul de $M = P^{-1}AP$:

$$\begin{aligned}M &= P^{-1}AP \\ &= P^{-1}\begin{pmatrix} -31 & 24 \\ -40 & 31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. Calculs de M^2 et de M^3 puis déduction de $M^n, \forall n \in \mathbb{N}$:

a) Calcul de M^2 :

$$M^2 = M.M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix}$$

b) Calcul de M^3 :

$$M^3 = M^2.M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}$$

c) Déduction de $M^n, \forall n \in \mathbb{N}$:

D'après ce qui précède, on remarque que la puissance n de la matrice M s'écrit :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \tag{5}$$

Ce résultat est à démontrer par récurrence :

i – Vérifions le résultat (5) pour $n = 1$:

$$M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M$$

ii – Supposons que (5) est vrai.

iii – Démontrons que $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$:

$$M^{n+1} = M^n.M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Le résultat (5) est évident puisque la puissance n d'une matrice diagonale telle que M est simplement une matrice diagonale de même taille dont les éléments diagonaux sont les puissances n respectives des éléments diagonaux de la matrice initiale M.

3. Déduction de $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$:

Vérification préliminaire :

$$
\begin{aligned}
PP^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \\
P^{-1}P &= \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2
\end{aligned}
$$

Comme :

$$M = P^{-1}AP \tag{6}$$

On peut pré-multiplier (6) par la matrice P et la post-multiplier par la matrice P^{-1} pour isoler la matrice A :

$$
\begin{aligned}
PMP^{-1} &= PP^{-1}APP^{-1} \\
&= (PP^{-1})A(PP^{-1}) \\
&= I_2 A I_2 \\
&= A
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
A^n &= (PMP^{-1})^n \\
&= P^n M^n (P^{-1})^n \\
&= P^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} (P^{-1})^n
\end{aligned}
$$

TD d'algèbre linéaire

Série 2 : Caractéristiques des matrices carrées

Ex. 15 —
Calculer la trace et le déterminant de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -9 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Answer (Ex. 15) —

1. Trace et déterminant de la matrice A :

$$tr(A) = 2 - 1 + 2 = 3$$
$$\det(A) = (-4 + 3 + 27) - (27 - 2 + 6) = -5 \text{ (Règle de Sarrus)}$$

2. Trace et déterminant de la matrice B :

$$tr(B) = 1 + 4 + 8 = 13$$
$$\det(B) = (32 + 15 - 6) - (40 + 3 - 24) = 22 \text{ (Règle de Sarrus)}$$

3. Trace et déterminant de la matrice C :

$$tr(C) = -1 + 0 - 1 + 2 = 0$$
$$\det(C) = 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 0$$
$$= -2\left[(-2 + 6 + 6) - (2 - 3 + 12)\right] - 2\left[(-6 - 6 - 2) - (12 - 3 + 2)\right]$$
$$= 52 \text{ (Développement selon la deuxième colonne)}$$

4. Trace et déterminant de la matrice D :

$$tr(D) = 1 + 5 + 0 + 8 = 14$$
$$\det(D) = 0 \text{ (car il y a une colonne nulle)}$$

Ex. 16 —

Trouver les valeurs des réels t et λ telles que :

$$\begin{vmatrix} t & 2t \\ 1 & t \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} t-2 & t \\ 3 & t+2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Answer (Ex. 16) —

1. Valeurs du réel t annulant le déterminant :

$$\begin{vmatrix} t & 2t \\ 1 & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0$$
$$\Leftrightarrow t(t-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = 2$$

2. Valeurs du réel t annulant le déterminant :

$$\begin{vmatrix} t-2 & t \\ 3 & t+2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+2) - 3t = 0$$
$$\Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ ou } t = 4$$

3. Valeurs du réel λ annulant le déterminant :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow (4-\lambda)(1-\lambda)+2=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda=2 \text{ ou } \lambda=3\end{aligned}$$

4. Valeurs du réel λ annulant le déterminant :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1-\lambda & 5 \\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow -(1+\lambda)(1-\lambda)-5=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2-6=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda=-\sqrt{6} \text{ ou } \lambda=\sqrt{6}\end{aligned}$$

Ex. 17 —

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}7 & 5 \\ -6 & -4\end{pmatrix}$.

1. Calculer la trace et le déterminant de la matrice A.
2. Calculer sa matrice inverse A^{-1}.
3. Calculer $A^2-3A+2I_2$.
4. En déduire que la matrice A est inversible et retrouver sa matrice inverse A^{-1}.

Answer (Ex. 17) —

1. Trace et déterminant de la matrice A :

$$\begin{aligned}tr(A) &= 7-4=3 \\ \det(A) &= 7(-4)-5(-6)=2\end{aligned}$$

2. Matrice inverse A^{-1} :

a) Matrice des cofacteurs A^c :

$$A^c = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}(-4) & (-1)^{1+2}(-6) \\ (-1)^{2+1}5 & (-1)^{2+2}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Matrice adjointe A^a :

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

c) Matrice inverse A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2.5 \\ 3 & 3.5 \end{pmatrix}$$

3. Calcul de $A^2 - 3A + 2I_2$:
   a) Calcul de A^2 :

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 15 \\ -18 & -14 \end{pmatrix}$$

   b) Calcul de $A^2 - 3A + 2I_2$:

$$A^2 - 3A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 19 & 15 \\ -18 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & -15 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$$

4. Inversibilité et inverse de la matrice A :

$$\begin{aligned}
A^2-3A+2I_2=O_2 &\Leftrightarrow A^2-3A=-2I_2\\
&\Leftrightarrow (A-3I_2)A=-2I_2\\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(A-3I_2)A=I_2\\
&\Leftrightarrow A^{-1}=-\frac{1}{2}(A-3I_2)\\
&\Leftrightarrow A^{-1}=-\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}I_2\\
&\Leftrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\\ 3 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -2.5\\ 3 & 3.5\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ex. 18 —
Soient les matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\quad ;\quad J=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2 et vérifier que les matrices A et J commutent.
2. Donner J^{-1}.
3. Montrer que $A(A+6J)=-5I_4$.
4. En déduire A^{-1}.
5. Montrer que $(A+2I_4+3J)^2=4(A+2I_4+3J)$.

Answer (Ex. 18) —

1. Calcul de J^2 et vérification de $AJ=JA$:

a) Calcul de J^2 :

$$J^2 = J.J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

b) Vérification de $AJ = JA$:

$$AJ = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Valeur de J^{-1} :

$$J.J = I_4 \Leftrightarrow J^{-1} = J$$

3. Montrons $A(A + 6J) = -5I_4$:

a) Calcul de $A + 6J$:

$$A + 6J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calcul de $A(A+6J)$:

$$A(A+6J) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = -5I_4$$

4. Déduction de A^{-1} :

$$\begin{aligned} A(A+6J) = -5I_4 &\Leftrightarrow -\frac{1}{5}A(A+6J) = I_4 \\ &\Leftrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{5}(A+6J) \\ &\Leftrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. Montrons que $(A+2I_4+3J)^2 = 4(A+2I_4+3J)$:

$$\begin{aligned} (A+2I_4+3J)^2 &= A^2 + 2^2I_4^2 + 3^2J^2 + 4AI_4 + 6AJ + 12I_4J \\ &= A(A+6J) + 4I_4 + 9J^2 + 4A + 12J \\ &= -5I_4 + 4I_4 + 9I_4 + 4A + 12J \\ &= 4A + 8I_4 + 12J \\ &= 4(A+2I_4+3J) \end{aligned}$$

Ex. 19 —

Calculer les matrices inverses des matrices suivantes par la méthode des cofacteurs :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Answer (Ex. 19) —

1. Inverse de la matrice A :

   a) Déterminant $det(A)$:

   A est une matrice carrée d'ordre 3, son déterminant peut être calculé selon la règle de Sarrus comme suit :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+0+1) - (0+0+0) = 1$$

   b) Matrice des cofacteurs A^c :

$$A^c = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Matrice adjointe A^a :

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Matrice inverse A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Vérification de la matrice inverse A^{-1} :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

A^{-1} est bien l'inverse de la matrice A.

2. Inverse de la matrice B :

a) Déterminant $det(B)$:

B est une matrice carrée d'ordre 3, son déterminant peut être calculé selon la règle de Sarrus comme suit :

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (5 + 0 - 6) - (2 + 30 + 0) = -33$$

b) Matrice des cofacteurs B^c :

$$B^c = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 8 \\ -3 & -3 & -15 \\ -1 & -12 & -5 \end{pmatrix}$$

c) Matrice adjointe B^a :

$$B^a = (B^c)^\top = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 6 & -3 & -12 \\ 8 & -15 & -5 \end{pmatrix}$$

d) Matrice inverse B^{-1} :

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} B^a = \frac{1}{-33} \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 6 & -3 & -12 \\ 8 & -15 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 12 \\ -8 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

e) Vérification de la matrice inverse B^{-1} :

$$BB^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 12 \\ -8 & 15 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

B^{-1} est bien l'inverse de la matrice B.

3. Inverse de la matrice C : Déterminant $det(C)$:

C est une matrice carrée d'ordre 3, son déterminant peut être calculé selon la règle de Sarrus comme suit :

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-9 - 2 + 3) - (6 - 9 - 1) = -4$$

Matrice des cofacteurs C^c :

$$C^c = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 4 & -5 & -7 \\ -4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrice adjointe C^a :

$$C^a = (C^c)^\top = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -1 & -5 & 4 \\ -3 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrice inverse C^{-1} :

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} C^a = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -1 & -5 & 4 \\ -3 & -7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0.25 & 1.25 & -1 \\ 0.75 & 1.75 & -2 \end{pmatrix}$$

Vérification de la matrice inverse C^{-1} :

$$CC^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0.25 & 1.25 & -1 \\ 0.75 & 1.75 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

C^{-1} est bien l'inverse de la matrice C.

1. Inverse de la matrice D :
   a) Déterminant $det(D)$:
      D est une matrice triangulaire, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 2 \times (-2) = -4$$

b) Matrice des cofacteurs D^c :

$$D^c = \begin{pmatrix}
+\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix} \\
+\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3&1&-1\\3&1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4&0&0&0\\4&-4&0&0\\4&-2&-2&0\\4&-5&-3&2\end{pmatrix}$$

c) Matrice adjointe D^a :

$$D^a = (D^c)^\top = \begin{pmatrix}-4&4&4&4\\0&-4&-2&-5\\0&0&-2&-3\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

d) Matrice inverse D^{-1} :

$$D^{-1} = \frac{1}{\det(D)} D^a = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0.5 & 1.25 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}$$

e) Vérification de la matrice inverse D^{-1} :

$$DD^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0.5 & 1.25 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

D^{-1} est bien l'inverse de la matrice D.

Ex. 20 — Examen de l'année 2016/2017 - Session 1 - Groupes A et C

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2 - (x+t)A$;
2. Déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.

Answer (Ex. 20) —

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

1. Calcul de $A^2 - (x+t)A$:

   a) Calcul de A^2 :

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ xz + tz & yz + t^2 \end{pmatrix}$$

b) Calcul de $(x+t)A$:

$$(x+t)A = (x+t)\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(x+t) & y(x+t) \\ z(x+t) & t(x+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+xt & xy+yt \\ xz+tz & xt+t^2 \end{pmatrix}$$

c) Calcul de $A^2-(x+t)A$:

$$\begin{aligned} A^2-(x+t)A &= \begin{pmatrix} x^2+yz & xy+yt \\ xz+tz & yz+t^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^2+xt & xy+yt \\ xz+tz & xt+t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz-xt & 0 \\ 0 & yz-xt \end{pmatrix} \\ &= (yz-xt)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\det(A)I_2 \end{aligned}$$

2. Inversibilité et inverse de la matrice A :

$$\begin{aligned} A^2-(x+t)A = -\det(A)I_2 &\Leftrightarrow \left[A-(x+t)I_2\right]A = -\det(A)I_2 \\ &\Leftrightarrow \left[-\frac{1}{\det(A)}(A-(x+t)I_2)\right]A = I_2 \\ &\Leftrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{\det(A)}(A-(x+t)I_2) \end{aligned}$$

Ex. 21 — Examen de l'année 2015/2016 - Session 1 - Groupes A et C

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A est inversible.
2. Calculer sa matrice inverse A^{-1}.
3. Déduire l'expression de A^3 et de A^5 en fonction de A.

Answer (Ex. 21) —

1. Inversibilité de la matrice A :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{vmatrix} = (455 + 576 + 576) - (504 + 624 + 480) \text{ (Règle de Sarrus)}$$
$$= -1 \neq 0$$

Son déterminant étant non nul, la matrice A est donc inversible.

2. Matrice inverse A^{-1} :

a) Matrice des cofacteurs A^c :

$$A^c = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -7 & -12 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 12 & -12 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 12 & -7 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -8 & -12 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 13 & -12 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 13 & -8 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -8 & -12 \\ -7 & -12 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 13 & -12 \\ 12 & -12 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 13 & -8 \\ 12 & -7 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -12 & -6 \\ 8 & 7 & 4 \\ 12 & 12 & 5 \end{pmatrix} = -A^\top$$

b) Matrice adjointe A^a :

$$A^a = (A^c)^\top = (-A^\top)^\top = -A = \begin{pmatrix} -13 & 8 & 12 \\ -12 & 7 & 12 \\ -6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

c) Matrice inverse A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Expressions de A^3 et de A^5 en fonction de A :

   a) Expressions de A^3 en fonction de A :

$$A^3 = A.A.A = A.A.A^{-1} = A.(A.A^{-1}) = A.I_3 = A$$

   b) Expressions de A^5 en fonction de A :

$$A^5 = A^3.A^2 = A^3.(A.A) = A.(A.A^{-1}) = A.I_3 = A$$

Ex. 22 — Examen de l'année 2014/2015 - Session 1 - Groupes C et D

1. Inverser si possible, les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

2. La matrice AB est-elle inversible ?
3. Trouver, si possible, la matrice F telle que $F^{-1} = \frac{1}{2}AB - 8I_2$.

Answer (Ex. 22) —

1. Inversion de matrices :

   a) Inversion de la matrice A :

      i – Déterminant de la matrice A :

$$det(A) = 2 \times 3 - 4 \times (-1) = 10 \neq 0$$

      Son déterminant étant non nul, la matrice A est inversible.

      ii – Matrice des cofacteurs A^c :

$$A^c = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}3 & (-1)^{1+2}4 \\ (-1)^{2+1}(-1) & (-1)^{2+2}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

iii – Matrice adjointe A^a :

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

iv – Matrice inverse A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 \\ -0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

b) Inversion de la matrice B :
Déterminant de la matrice B :

$$det(B) = 6 \times 6 - (-4) \times (-9) = 0$$

Son déterminant étant nul, la matrice B est singulière (i.e. non inversible).

2. Inversibilité de la matrice AB :
Déterminant de la matrice AB :

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B) = 10 \times 0 = 0$$

Son déterminant étant nul, la matrice AB est singulière (i.e. non inversible).

3. Matrice F vérifiant $F^{-1} = \frac{1}{2}AB - 8I_2$:
a) Calcul de AB :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -24 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}$$

b) Calcul de $F^{-1} = \frac{1}{2}AB - 8I_2$:

$$F^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 16 & -24 \\ 12 & -18 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ 6 & -17 \end{pmatrix}$$

c) Calcul de F :
La matrice F est simplement l'inverse de la matrice F^{-1} si celle-ci est inversible :

i – Déterminant de la matrice F^{-1} :

$$\det(F^{-1}) = 0 \times (-17) - 6 \times (-12) = 72 \neq 0$$

Son déterminant étant non nul, la matrice F^{-1} est inversible.

ii – Matrice des cofacteurs F^{c}_{-1} :

$$F^{c}_{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \times (-17) & (-1)^{1+2} \times 6 \\ (-1)^{2+1} \times (-12) & (-1)^{2+2} \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -6 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

iii – Matrice adjointe F^{a}_{-1} :

$$F^{a}_{-1} = (F^{c}_{-1})^{\top} = \begin{pmatrix} -17 & 12 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

iv – Matrice inverse F :

$$F = \frac{1}{det(F^{-1})} F^{a}_{-1} = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} -17 & 12 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex. 23 — Examen (modifié) de l'année 2015/2016 - Session 1 - Groupes B et D

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 26 & -16 & -24 \\ 24 & -14 & -24 \\ 12 & -8 & -10 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la matrice B est inversible.
2. Calculer B^{-1}.
3. Déduire l'expression de B^3 et de B^5 en fonction de B.

Answer (Ex. 23) —

Remarque préliminaire :

Cet exercice est identique à l'exercice 7 ci-dessus à la différence près que la matrice A a été simplement multipliée par 2 :

$$B = \begin{pmatrix} 26 & -16 & -24 \\ 24 & -14 & -24 \\ 12 & -8 & -10 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \equiv 2A$$

Ainsi, le présent exercice sera résolu dans un premier temps en se basant uniquement sur les propriétés du déterminant, de l'inverse et des puissances d'une matrice. Ensuite, il sera résolu en suivant la même démarche que dans l'exercice 7.

Première méthode :

1. Inversibilité de la matrice B :

$$\det(B) = \det(2A) = 2^3 \det(A) = 8 \times (-1) = -8 \neq 0$$

   Son déterminant étant non nul, la matrice B est donc inversible.

2. Matrice inverse B^{-1} :

$$B^{-1} = (2A)^{-1} = 2^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Expressions de B^3 et de B^5 en fonction de B :

   a. Expressions de B^3 en fonction de B :

$$B^3 = (2A)^3 = 2^3(A)^3 = 2^3A = 2^2(2A) = 4B$$

   b. Expressions de B^5 en fonction de B :

$$B^5 = (2A)^5 = 2^5A^5 = 2^5A = 2^4(2A) = 16B$$

Deuxième méthode :

1. Inversibilité de la matrice B :

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 26 & -16 & -24 \\ 24 & -14 & -24 \\ 12 & -8 & -10 \end{vmatrix} = (3640 + 4608 + 4608) - (4032 + 4992 + 3840) \text{ (Règle de Sarrus)}$$
$$= -8 \neq 0$$

Son déterminant étant non nul, la matrice B est donc inversible.

2. Matrice inverse B^{-1} :

   a. Matrice des cofacteurs B^c :

$$B^c = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -14 & -24 \\ -8 & -10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 24 & -24 \\ 12 & -10 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 24 & -14 \\ 12 & -8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -16 & -24 \\ -8 & -10 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 26 & -24 \\ 12 & -10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 26 & -16 \\ 12 & -8 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -16 & -24 \\ -14 & -24 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 26 & -24 \\ 24 & -24 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 26 & -16 \\ 24 & -14 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 & -48 & -24 \\ 32 & 28 & 16 \\ 48 & 48 & 20 \end{pmatrix} = -2B^\top$$

   b. Matrice adjointe B^a :

$$B^a = (B^c)^\top = (-2B^\top)^\top = -2B = \begin{pmatrix} -52 & 32 & 48 \\ -48 & 28 & 48 \\ -24 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

   c. Matrice inverse B^{-1} :

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} B^a = \frac{1}{-8}(-2B) = \frac{1}{4} B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Expressions de B^3 et de B^5 en fonction de B :

$$B^{-1} = \frac{1}{4}B \Leftrightarrow B = 4B^{-1}$$

a. Expressions de B^3 en fonction de B :

$$B^3 = B.B.B = (4B^{-1}).B.B = 4(B^{-1}B)B = 4I_3B = 4B$$

b. Expressions de B^5 en fonction de B :

$$B^5 = B^3.B.B = (4B).B.(4B^{-1}) = 16B(BB^{-1}) = 16BI_3 = 16B$$

Ex. 24 — Examen de l'année 2014/2015 - Session 1 - Groupes A et B

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Déterminer x, y et z tels que $-A^3 + xA^2 + yA + zI_3 = 0$.
3. Déduire la matrice inverse A^{-1}.

Answer (Ex. 24) —

1. Calcul de A^2 et A^3 :

   a) Calcul de A^2 :

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   b) Calcul de A^3 :

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 1 \\ 12 & 15 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Valeurs de x, y et z vérifiant $-A^3+xA^2+yA+zI_3=0$:
   a) Calcul de $-A^3+xA^2+yA+zI_3$:

$$
\begin{aligned}
&-A^3+xA^2+yA+zI_3\\
&=\begin{pmatrix}-15 & -12 & -1\\ -12 & -15 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4x & 5x & x\\ 5x & 4x & -x\\ -x & x & -2x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y & 2y & -y\\ 2y & y & y\\ y & -y & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z & 0 & 0\\ 0 & z & 0\\ 0 & 0 & z\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}4x+y+z-15 & 5x+2y-12 & x-y-1\\ 5x+2y-12 & 4x+y+z-15 & -x+y+1\\ -x+y+1 & x-y-1 & -2x+z-2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

   b) Valeurs de x, y et z vérifiant $-A^3+xA^2+yA+zI_3=0$:

$$
\begin{aligned}
-A^3+xA^2+yA+zI_3=0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}4x+y+z-15 & 5x+2y-12 & x-y-1\\ 5x+2y-12 & 4x+y+z-15 & -x+y+1\\ -x+y+1 & x-y-1 & -2x+z-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}4x+y+z-15 = 0\\ 5x+2y-12 = 0\\ x-y-1 = 0\\ -2x+z-2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+y+z = 15\\ 5x+2y = 12\\ x-y = 1\\ -2x+z = 2\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases}4x+y+z = 15\\ 7y = 7\\ x = 1+y\\ -2x+z = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8+1+6 = 15\\ y = 1\\ x = 2\\ z = 6\end{cases}
$$

$$-A^3+2A^2+A+6I_3=0$$

3. Matrice inverse A^{-1} :

$$\begin{aligned}-A^3+2A^2+A+6I_3=0 &\Leftrightarrow -A^3+2A^2+A=-6I_3\\ &\Leftrightarrow (-A^2+2A+I_3)A=-6I_3\\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{6}(-A^2+2A+I_3)A=I_3\\ &\Leftrightarrow A^{-1}=-\frac{1}{6}(-A^2+2A+I_3)\end{aligned}$$

Ex. 25 — Examen de l'année 2016/2017 - Session 1 - Groupes B et D

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}2&4&-2\\4&2&2\\2&-2&0\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réels x , y et z tels que $-A^3+xA^2+yA+zI_3=0_3$.
2. Déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.

Answer (Ex. 25) —

1. Valeurs des réels x , y et z vérifiant $-A^3+xA^2+yA+zI_3=0_3$:
   a) Calcul de A^2 :

$$A^2=A.A=\begin{pmatrix}2&4&-2\\4&2&2\\2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&-2\\4&2&2\\2&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&20&4\\20&16&-4\\-4&4&-8\end{pmatrix}$$

   b) Calcul de A^3 :

$$A^3=A^2.A=\begin{pmatrix}16&20&4\\20&16&-4\\-4&4&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&-2\\4&2&2\\2&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}120&96&8\\96&120&-8\\-8&8&16\end{pmatrix}$$

c) Calcul de $-A^3 + xA^2 + yA + zI_3$:

$$
\begin{aligned}
-A^3+&xA^2 + yA + zI_3 \\
&= \begin{pmatrix} -120 & -96 & -8 \\ -96 & -120 & 8 \\ 8 & -8 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16x & 20x & 4x \\ 20x & 16x & -4x \\ -4x & 4x & -8x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y & 4y & -2y \\ 4y & 2y & 2y \\ 2y & -2y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 16x+2y+z-120 & 20x+4y-96 & 4x-2y-8 \\ 20x+4y-96 & 16x+2y+z-120 & -4x+2y+8 \\ -4x+2y+8 & 4x-2y-8 & -8x+z-16 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

d) Valeurs des réels x , y et z vérifiant $-A^3 + xA^2 + yA + zI_3 = 0_3$:

$$
\begin{aligned}
&-A^3 + xA^2 + yA + zI_3 = 0_3 \\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 16x+2y+z-120 & 20x+4y-96 & 4x-2y-8 \\ 20x+4y-96 & 16x+2y+z-120 & -4x+2y+8 \\ -4x+2y+8 & 4x-2y-8 & -8x+z-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 16x+2y+z-120 & 4(5x+y-24) & -2(-2x+y+4) \\ 4(5x+y-24) & 16x+2y+z-120 & 2(-2x+y+4) \\ 2(-2x+y+4) & -2(-2x+y+4) & -8x+z-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+y-24 &= 0 \\ -2x+y+4 &= 0 \\ 16x+2y+z-120 &= 0 \\ -8x+z-16 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+y &= 24 \\ 2x-y &= 4 \\ 16x+2y+z &= 120 \\ -8x+z &= 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+y &= 24 \\ 7x &= 28 \\ 16x+2y+z &= 120 \\ -8x+z &= 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y &= 4 \\ x &= 4 \\ 64+8+48 &= 120 \\ z &= 48 \end{cases}$$

2. Déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1} :

$$\begin{aligned} -A^3+4A^2+4A+48I_3 = 0_3 &\Leftrightarrow -A^3+4A^2+4A = -48I_3 \\ &\Leftrightarrow (-A^2+4A+4I_3)A = -48I_3 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{48}(-A^2+4A+4I_3)A = I_3 \\ &\Leftrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{48}(-A^2+4A+4I_3) \end{aligned}$$

Ex. 26 — **Examen de l'année 2014/2015 - Session 1 - Groupes C et D**

Pour tout réel a, on considère la matrice M_a définie par : $M_a = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a la matrice M_a est-elle inversible ?
2. Dans le cas où $a = 3$, calculer le déterminant de la matrice M_3 et déterminer sa matrice inverse.

Answer (Ex. 26) —

1. Valeurs de a assurant l'inversibilité de la matrice M_a :

La matrice M_a est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Comme M_a est une matrice carrée d'ordre 3, son déterminant peut être calculé selon la règle de Sarrus :

$$\det(M_a) = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a^3 + 1 - 1) - (a + a - a) = a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a-1)(a+1)$$

Les valeurs de a qui annulent le déterminant de la matrice M_a sont -1, 0 et 1. Ainsi, la matrice M_a est inversible pour toutes les valeurs réelles de a à l'exception de -1, 0 et 1.

2. Inverse de la matrice M_3 par la méthode des cofacteurs :
   a) Déterminant de M_3 :

$$\det(M_3) = 3^3 - 3 = 24$$

   b) Matrice des cofacteurs M_3^c :

$$M_3^c = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$M_3^c = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

c) Matrice adjointe M_3^a :

$$\begin{aligned} M_3^a &= (M_3^c)^\top \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ -4 & 8 & 4 \\ -4 & 2 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Matrice inverse M_3^{-1} :

$$\begin{aligned} M_3^{-1} &= \frac{1}{\det(M_3)} M_3^a \\ &= \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ -4 & 8 & 4 \\ -4 & 2 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e) Vérification de l'inverse M_3^{-1} :

$$M_3.M_3^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Ex. 27 — Examen (modifié) de l'année 2016/2017 - Session 2 - Groupes B et D

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que la matrice A est inversible.
2. Déterminer la valeur de α telle que $A^3 - A^2 + \alpha A = I_3$.

3. Donner l'expression de la matrice inverse A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3.
4. Déduire A^{-1}.

Answer (Ex. 27) —

1. Inversibilité de la matrice A :
   La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Comme A est une matrice carrée d'ordre 3, son déterminant peut être calculé selon la règle de Sarrus :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-4 - 6 + 5) - (-10 + 6 - 2) = 1 \neq 0$$

   Le déterminant étant non nul, on conclut que la matrice A est inversible.
2. Valeur de α vérifiant l'égalité $A^3 - A^2 + \alpha A = I_3$:
   a) Calcul de A^2 :

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -3 \\ 5 & -3 & 4 \\ -1 & -5 & -9 \end{pmatrix}$$

   b) Calcul de A^3 :

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -3 \\ 5 & -3 & 4 \\ -1 & -5 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 47 \\ -5 & -12 & -26 \\ -21 & 5 & -28 \end{pmatrix}$$

c) Calcul de $A^3 - A^2 + \alpha A$:

$$A^3 - A^2 + \alpha A = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 47 \\ -5 & -12 & -26 \\ -21 & 5 & -28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 6 & -3 \\ 5 & -3 & 4 \\ -1 & -5 & -9 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21-2\alpha & 10-\alpha & 50-5\alpha \\ -10+\alpha & -9+\alpha & -30+3\alpha \\ -20+2\alpha & 10-\alpha & -19+2\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21-2\alpha & -(\alpha-10) & -5(\alpha-10) \\ \alpha-10 & \alpha-9 & 3(\alpha-10) \\ 2(\alpha-10) & -(\alpha-10) & -19+2\alpha \end{pmatrix}$$

d) Valeur de α :

$$A^3 - A^2 + \alpha A = I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 21-2\alpha & -(\alpha-10) & -5(\alpha-10) \\ \alpha-10 & \alpha-9 & 3(\alpha-10) \\ 2(\alpha-10) & -(\alpha-10) & -19+2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 10 &= 0 \\ 21 - 2\alpha &= 1 \\ \alpha - 9 &= 1 \\ -19 + 2\alpha &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 10$$

3. Expression de la matrice inverse A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3 :

$$\begin{aligned} A^3 - A^2 + 10A = I_3 &\Leftrightarrow (A^2 - A + 10I_3)A = I_3 \\ &\Leftrightarrow A^{-1} = A^2 - A + 10I_3 \end{aligned}$$

4. Déduction de A^{-1} :

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= A^2 - A + 10I_3 \\
&= \begin{pmatrix} -7 & 6 & -3 \\ 5 & -3 & 4 \\ -1 & -5 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ex. 28 —

Calculer les valeurs et les vecteurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ex. 29 —

1. Valeurs et les vecteurs propres de la matrice A :
   a) Valeurs propres :
   Équation caractéristique :

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_2) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 3
\end{aligned}$$

   L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes 2 et 3. Ainsi, les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

   b) Vecteurs propres :

Soient $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)'$ et $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)'$ les vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2. Le vecteur $\mathbf{v}_1$ est calculé comme suit :

$$(A - \lambda_1 I_2)\mathbf{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 2y_1 & = & 0 \\ -x_1 - y_1 & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow y_1 = -x_1$$

Ainsi, le vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$ est défini par :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \ \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

Le vecteur $\mathbf{v}_2$ est calculé comme suit :

$$(A - \lambda_2 I_2)\mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 + 2y_2 & = & 0 \\ -x_2 - 2y_2 & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow x_2 = -2y_2$$

Ainsi, le vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$ est défini par :

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \forall y_2 \in \mathbb{R}$$

2. Valeurs et les vecteurs propres de la matrice B :
   a) Valeurs propres :
   Équation caractéristique :

$$\det(B - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow -(1+\lambda)(1-\lambda) - 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = -\sqrt{6} \text{ ou } \lambda = \sqrt{6}$$

L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes $-\sqrt{6}$ et $\sqrt{6}$. Ainsi, les valeurs propres de la matrice B sont $\lambda_1 = -\sqrt{6}$ et $\lambda_2 = \sqrt{6}$.

b) Vecteurs propres :

Soient $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)'$ et $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)'$ les vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2. Le vecteur $\mathbf{v}_1$ est calculé comme suit :

$$(B - \lambda_1 I_2)\mathbf{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+\sqrt{6} & 5 \\ 1 & \sqrt{6}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{6})x_1 + 5y_1 &= 0 \\ x_1 + (\sqrt{6}-1)y_1 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{6})(1-\sqrt{6})y_1 + 5y_1 = 0 \\ x_1 = (1-\sqrt{6})y_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = (1-\sqrt{6})y_1$$

Ainsi, le vecteur propre de la matrice B associé à la valeur propre $\lambda_1 = -\sqrt{6}$ est défini par :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{6})y_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1-\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \forall y_1 \in \mathbb{R}$$

Le vecteur $\mathbf{v}_2$ est calculé comme suit :

$$(B - \lambda_2 I_2)\mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\sqrt{6} & 5 \\ 1 & -1-\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{6})x_2 + 5y_2 &= 0 \\ x_2 - (1+\sqrt{6})y_2 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{6})(1+\sqrt{6})y_2 + 5y_2 = 0 \\ x_2 = (1+\sqrt{6})y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = (1+\sqrt{6})y_2$$

Ainsi, le vecteur propre de la matrice B associé à la valeur propre $\lambda_2 = \sqrt{6}$ est défini par :

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{6})y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_2 \begin{pmatrix} 1+\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \forall y_2 \in \mathbb{R}$$

3. Valeurs et les vecteurs propres de la matrice C :

a) Valeurs propres :

Équation caractéristique :

$$\det(C - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left[(2-\lambda)^3 + 0 + 0\right] - \left[(2-\lambda) + 0 + 0\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (2-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3
\end{aligned}$$

L'équation caractéristique admet trois racines réelles distinctes 1, 2 et 3. Ainsi, les valeurs propres de la matrice C sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.

b) Vecteurs propres :
Soient $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)'$, $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)'$ et $\mathbf{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)'$ les vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3. Le vecteur $\mathbf{v}_1$ est calculé comme suit :

$$(C - \lambda_1 I_3)\mathbf{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - z_1 & = & 0 \\ 2x_1 + y_1 + 2z_1 & = & 0 \\ -x_1 + z_1 & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 \\ y_1 = -4z_1 \end{cases}$$

Ainsi, le vecteur propre de la matrice C associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est défini par :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ -4z_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \forall z_1 \in \mathbb{R}$$

Le vecteur $\mathbf{v}_2$ est calculé comme suit :

$$(C-\lambda_2 I_3)\mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -z_2 & = 0 \\ 2x_2 + 2z_2 & = 0 \\ -x_2 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, le vecteur propre de la matrice C associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ est défini par :

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \forall y_2 \in \mathbb{R}$$

Le vecteur $\mathbf{v}_3$ est calculé comme suit :

$$(C-\lambda_3 I_3)\mathbf{v}_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_3 - z_3 & = 0 \\ 2x_3 - y_3 + 2z_3 & = 0 \\ -x_3 - z_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -z_3 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, le vecteur propre de la matrice C associé à la valeur propre $\lambda_3 = 3$ est défini par :

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_3 \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix} = z_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \forall z_3 \in \mathbb{R}$$

4. Valeurs et les vecteurs propres de la matrice D :
   a) Valeurs propres :

Équation caractéristique :

$$\det(D-\lambda I_3)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ 2 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow [(3-\lambda)(6-\lambda)(5-\lambda)+0+0]-[0+12(3-\lambda)+0]=0\\
&\Leftrightarrow (3-\lambda)(6-\lambda)(5-\lambda)-12(3-\lambda)=0\\
&\Leftrightarrow (3-\lambda)\,[(6-\lambda)(5-\lambda)-12]=0\\
&\Leftrightarrow (3-\lambda)(\lambda^2-11\lambda+18)=0\\
&\Leftrightarrow 3-\lambda=0 \text{ ou } \lambda^2-11\lambda+18=0\\
&\Leftrightarrow \lambda=3 \text{ ou } \lambda=2 \text{ ou } \lambda=9
\end{aligned}$$

L'équation caractéristique admet trois racines réelles distinctes 2, 3 et 9. Ainsi, les valeurs propres de la matrice D sont $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ et $\lambda_3=9$.

b) Vecteurs propres :

Soient $\mathbf{v}_1=(x_1,y_1,z_1)'$, $\mathbf{v}_2=(x_2,y_2,z_2)'$ et $\mathbf{v}_3=(x_3,y_3,z_3)'$ les vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3. Le vecteur $\mathbf{v}_1$ est calculé comme suit :

$$(D-\lambda_1 I_3)\mathbf{v}_1=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = 0 \\ 2x_1+4y_1+4z_1 & = 0 \\ 2x_1+3y_1+3z_1 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=-z_1 \end{cases}$$

Ainsi, le vecteur propre de la matrice D associé à la valeur propre $\lambda_1=2$ est défini par :

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -z_1 \\ z_1 \end{pmatrix}=z_1\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \forall z_1\in\mathbb{R}$$

Le vecteur $\mathbf{v}_2$ est calculé comme suit :

$$(D - \lambda_2 I_3)\mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_2 + 3y_2 + 4z_2 & = & 0 \\ 2x_2 + 3y_2 + 2z_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = -\frac{3}{2} y_2 \\ z_2 = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, le vecteur propre de la matrice D associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$ est défini par :

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} y_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = y_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \forall y_2 \in \mathbb{R}$$

Le vecteur $\mathbf{v}_3$ est calculé comme suit :

$$(C - \lambda_3 I_3)\mathbf{v}_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -6x_3 & = & 0 \\ 2x_3 - 3y_3 + 4z_3 & = & 0 \\ 2x_3 + 3y_3 - 4z_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ y_3 = \frac{4}{3} z_3 \end{array} \right.$$

Ainsi, le vecteur propre de la matrice D associé à la valeur propre $\lambda_3 = 9$ est défini par :

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} z_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = z_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \ \forall z_3 \in \mathbb{R}$$