

# Chapitre (4) : Les intérêts composés

## I- Formule de base

Soit :

$C$  : montant du capital placé ;

$n$  : la durée de placement exprimée en années ;

$i$  : le taux d'intérêt pour un dirham de capital et pour une durée d'une année

Le tableau suivant montre les calculs des intérêts et de capitalisation annuelle des intérêts.

| Année | Capital au début de l'année | Intérêts de l'année    | Valeur acquise après la fin de l'année               |
|-------|-----------------------------|------------------------|--|
| 1     | $C$                         | $C * i$                | $C + (C * i) = C (1 + i)$                            |
| 2     | $C (1 + i)$                 | $[C (1 + i)] * i$      | $C (1 + i) + [C (1 + i)] * i = C(1 + i)^2$           |
| 3     | $C(1 + i)^2$                | $[C(1 + i)^2] * i$     | $C(1 + i)^2 + [C(1 + i)^2] * i = C(1 + i)^3$         |
| ...   | ...                         | ...                    | ...  |
| $n$   | $C(1 + i)^{n-1}$            | $[C(1 + i)^{n-1}] * i$ | $C(1 + i)^{n-1} + [C(1 + i)^{n-1}] * i = C(1 + i)^n$ |

La valeur acquise ( $C_n$ ) est obtenue par l'application de la formule suivante :

$$C_n = C(1 + i)^n$$

Les intérêts sont calculés par la différence entre la valeur acquise ( $C_n$ ) et le capital initialement placé ( $C$ ).

$$I = C_n - C = C [(1 + i)^n - 1]$$

## Remarques

- Le taux de placement et la durée de placement s'expriment par référence à la période de capitalisation des intérêts.

- Les valeurs acquises suivent une progression géométrique de raison  $(1 + i)$  ;
- Contrairement aux intérêts simples qui donnent directement le montant d'intérêts d'un placement, la formule de l'intérêt composé donne la valeur acquise par le capital placé.

### Exemple

*Un capital de 20 000 dh est placé à intérêts composés au taux annuel de 6%. La capitalisation des intérêts est annuelle. Calculer la valeur acquise après 5 ans.*

-----

*la valeur acquise après 5 ans :  $C_5 = 20\,000 (1 + 0,06)^5 = 26\,764,51\text{ dh}$*

*l'intérêt total reçu après 5 ans :  $I = 26\,764,51 - 20\,000 = 6\,764,51\text{ dh}$*

*Nous pouvons utiliser les tables financières : la table financière n°1 donne directement les valeurs acquises pour 1 dh placé.*

## **II- Calcul de la valeur acquise dans le cas d'un nombre de période non entier**

### **A. La méthode rationnelle**

La méthode rationnelle consiste à appliquer la formule de l'intérêt composé sur la partie entière, exprimée en termes d'années, et l'intérêt simple sur le reste de la durée, exprimée en termes de mois.

### Exemple

*Un capital de 50 000 dh est placé à intérêts composés pour une durée de 4 ans et 4 mois au taux annuel de 5%. La capitalisation est annuelle. Calculer la valeur acquise.*

-----

*la valeur acquise après 4 ans :  $C_4 = 50\,000 (1 + 0,05)^4 = 60\,775,31\text{ dh}$*

$$\text{Intérêt de 4 mois} = \frac{60\,775 \times 5 \times 4}{1200} = 1\,012,92\text{ dh}$$

La valeur acquise de la période :

$$C_{4\text{ans et } 4\text{ mois}} = 60\,775,31 + 1\,012,92 = \mathbf{61\,788,2\,3dh}$$

## B. La méthode commerciale

Il s'agit d'appliquer tout simplement la formule de base de l'intérêt composé en exprimant la durée du placement en nombre d'années.

### Exemple

$$n = 4\text{ ans et } 4\text{ mois} = 8 + \frac{4}{12} = 8,33\text{ ans}$$

La valeur acquise est calculée directement.

$$C_{8+3/12} = 50\,000 (1 + 0,05)^{8,33} = \mathbf{75\,071,81\,dh}$$

## III-Taux équivalents

Deux taux, correspondant à des périodes de capitalisations différentes, sont équivalents s'ils donnent, pour une même période de placement, à une même valeur acquise à intérêts composés.

Pour trouver le taux équivalent ( $i_k$ ) au taux ( $i$ ), on applique la formule suivante :

$$(1 + i) = (1 + i_k)^k$$

### Exemple

Calculer le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 8%

$$(1 + 0,08) = (1 + i_t)^4$$

$$(1 + i_t) = (1 + 0,08)^{\frac{1}{4}}$$

$$i_{\text{trimestriel}} = (1 + 0,08)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,0194 = \mathbf{1,94\%}$$

## IV- La valeur actuelle

La valeur actuelle exprime la somme qu'il faut placer ( $C_0$ ) à intérêt composé à la date 0 pour obtenir une valeur acquise  $C_n$  à la date n.

$$C_0 = C_n(1 + i)^{-n}$$

**Exemple**

*Quelle somme faut-il placer à intérêts composés au taux de 5% pour obtenir au bout de 5 ans un capital de 12 600 dh ? Capitalisation annuelle.*

-----

$$C_0 = 12\,600(1 + 0,04)^{-5}$$

*Il faut placé donc :  $C_0 = 9\,863,126$  dh*