Chapitre (6) : Les emprunts indivis

I- Définition et champ d'application

A. Définition

Un emprunt indivis est un emprunt ordinaire faisant l'objet d'un contrat entre un prêteur et un emprunteur (un particulier ou une entreprise). Il n'y a qu'un seul prêteur, il est donc indivisible, d'où le qualificatif indivis (le nominal C de la dette n'est pas divisé). L'emprunt indivis s'oppose donc à l'emprunt obligataire pour lequel l'emprunteur (une grande entreprise ou l'Etat) recourt à une multitude de créanciers (le nominal C de la dette est divisé en titres).

Il est caractérisé par plusieurs éléments:

- Le montant de l'emprunt C_0.
- La durée de l'emprunt N
- Le taux de l'emprunt i.

B. Remarque

Les modalités de remboursement peuvent prendre 3 formes:

- L'amortissement in fine ou emprunt remboursable en une seule fois.
- Remboursement par amortissements constants.
- Remboursement par annuités constantes.

II- Le tableau d'amortissement

Le remboursement d'un emprunt dépend du mode d'amortissement utilisé (in fine, par annuités constantes ou par amortissement constant). D'une façon générale le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1=C_0.i$	M_1	$a_1=I_1+M_1$
2	$C_1= C_0- M_1$	$I_2=C_1.i$	M_2	$a_2=I_2+M_2$
P	$C_{p-1}= C_{p-2}- M_{p-1}$	$I_p=C_{p-1}.i$	M_p	$a_p=I_p+M_p$
n-1	$C_{n-2}= C_{n-3}- M_{n-2}$	$I_{n-1}=C_{n-2}.i$	M_{n-1}	$a_{n-1}=I_{n-1}+M_{n-1}$
n	$C_{n-1}= C_{n-2}- M_{p-1}$	$I_n=C_{n-1}.i$	M_n	$a_n=I_n+M_n$

Avec:

C_o : capital restant dû au début de la première année soit le montant de l'emprunt.

I_p : intérêt de la $p^{ème}$ période.

M_p : amortissement de la $p^{ème}$ période.

a_p : annuité de la $p^{ème}$ période.

C_{p-1}: capital restant dû au début de la $p^{ème}$ période.

Dans le tableau ci-dessus, l'annuité de remboursement comprend deux éléments :

- Les intérêts payés sur la période écoulée notés I_p.
- Le capital amorti noté m_p

La formule de calcul :

$$\boxed{\mathbf{a_p = M_P + I_P}}$$

Les intérêts payés a la fin de chaque période sont calculés en appliquant le taux nominal au capital restant dû en début de période.

La formule de calcul :

$$\mathbf{I_p = C_{P-1} + i}$$

III- Quelques propriétés d'un emprunt indivis

A. Le capital restant dû

Le capital restant dû après le paiement des k premières annuités est égal au capital initial diminué des k premiers amortissements.

La formule de calcul :

$$\mathbf{C_K = C_0 - \sum_{P-1}^{K} M_p}$$

B. La somme des amortissements

Les amortissements servent à rembourser la dette donc leur somme est égale au capital emprunté:

$$\mathbf{\sum_{P-1}^{K} M_p = C_0}$$

Après le paiement du nième amortissement mn, le capital restant dû est égal à zéro donc la dette non remboursée avant le paiement de m_n est égale à m_n c'est-à-dire $C_{n-1}= m_n$.

C. Le montant des intérêts payés

Le montant des intérêts payés après le versement des p premières annuités est égal au montant I_P tel que :

$$\mathbf{I_K = \sum_{P-1}^{K} I_p}$$

D. Le coût total de l'emprunt

Le coût total de l'emprunt est égal à la somme de tous les intérêts versés.

$$\mathbf{I = \sum_{P-1}^{K} I_p}$$

E. Le dernier amortissement et la dernière annuité

Le dernier amortissement et la dernière annuité sont liés entre eux par une relation :

$$\mathbf{a_n = M_n + (C_{n-1} * i)}$$

IV- Remboursement in fine

A. Définition :

Le remboursement du capital d'un emprunt s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat. Le montant de l'intérêt (I) versé à chaque échéance, prévue par le contrat, est égal au montant emprunté multiplié par le taux d'intérêt.

Les caractéristiques de cet emprunt sont:

- Le capital emprunté C_o est remboursé a la fin de la dernière période.
- Le capital restant dû en début de période étant le même (C_o) l'intérêt payé à chaque période est une constante.
- Toutes les annuités sont constantes et égales au montant de l'intérêt sauf la dernière qui incorpore en plus l'intérêt de la dernière période, le montant du remboursement total du Capital emprunté (C_o).

Tableau d'amortissement

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = I = C_o * i$	..	$a_1 = I_1 = I$
2	C_0	$I_2 = I = C_o * i$	..	$a_2 = I_2 = I$
P	C_0	$I_p = I = C_o * i$	..	$a_p = I_p = I$
n-1	C_0	$I_{n-1} = I = C_o * i$	..	$a_{n-1} = I_{n-1} = I$
n	C_0	$I_n = I = C_o * i$	C_0	$a_n = I_n + C_0$

B. Application

Soit un emprunt de 100 000 dh, amorti sur 4 ans au taux de 6%

Période	Capital restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuités
1	100 000	6 000	-	6 000
2	100 000	6 000	-	6 000
3	100 000	6 000	-	6 000
4	100 000	6 000	100 000	106 000

V- Remboursement par amortissements constants

A. Définition

Il s'agit d'emprunt dont les remboursements se font par amortissements constants ou encore par série égale.

Les caractéristiques générales sont :

- A la fin de chaque période on rembourse une part constante du capital emprunté. Cette part est égale au capital emprunté divisé par le nombre de périodes de remboursement ;
- Le capital restant dû et les intérêts à payer diminuent régulièrement ;
- Les annuités de remboursement sont la somme des k remboursements et les intérêts payés.

B. Tableau d'amortissement

Si le capital emprunté est C_o et N le nombre de périodes, l'amortissement constant m est donné par la formule suivante :

$$\boxed{\mathbf{M = \frac{C_0}{N}}}$$

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortisseme nt	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 * i$	M	$a_1 = I_1 + M$
2	$C_1 = C_0 - M$	$I_2 = C_1 * i$	M	$a_2 = I_2 + M$
P	$C_{p-1} = C_{p-2} - M$	$I_p = C_{p-1} * i$	M	$a_p = I_p + M$
n-1	$C_{n-1} = C_{n-2} - M$	$I_{n-1} = C_{n-2} * i$	M	$a_{n-1} = I_{n-1} + M$
n	$C_n = C_{n-2} - M$	$I_n = C_{n-1} * i$	M	$a_n = I_n + M$

C. Application

$$C_0 = 100\,000\ dh\ ;\ \ i = 6\%\ \ ; n = 4\ ans$$

Période	Capital restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuités
1	100 000	6 000	25 000	31 000
2	75 000	4 500	25 000	29 500
3	50 000	3 000	25 000	28 000
4	25 000	1 500	25 000	26 500

VI- Remboursement par annuités constantes

A. Définition

Il s'agit d'un emprunt remboursé par annuités constantes dont les caractéristiques sont les suivantes :

- L'annuité de remboursement de fin de chaque période composée des intérêts et d'une fraction du capital amorti est une constante.

- Le capital remboursé à la fin de chaque période est égale à la différence entre l'annuité de remboursement et l'intérêt périodique.
- L'intérêt périodique est obtenu par multiplication du capital restant dû et le taux d'intérêt.
- Le montant de l'intérêt périodique diminue au cours du temps.

- L'annuité de remboursement est obtenue a partir de la relation donnant la valeur actuelle d'une suite de flux constants versés en fin de période pendant N périodes au taux i.

B. Rappel des annuités constantes: (voir fiche: 7)

$$\mathbf{C_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \rightarrow \quad a = \frac{C_0 * i}{1-(1+i)^{-n}}}$$

Tableau d'amortissement

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 * i$	M_1	$a_1 = I_1 + M_1$
2	$C_1 = C_0 - M_1$	$I_2 = C_1 * i$	M_2	$a_2 = I_2 + M_2$
P	$C_{p-1} = C_{p-2} - M_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} * i$	M_{p-1}	$a_p = I_p + M_p$
n-1	$C_{n-1} = C_{n-2} - M_{n-1}$	$I_{n-1} = C_{n-2} * i$	M_{n-1}	$a_{n-1} = I_{n-1} + M_{p-1}$
n	$C_n = C_{n-2} - M_n$	$I_n = C_{n-1} * i$	M_n	$a_n = I_n + M_n$

C. Application

$$C_0 = 100\,000\ dh\ ;\ \ i = 6\%\ \ ; n = 4\ ans$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{C_0 * i}}{\mathbf{1-(1+i)^{-n}}} = \mathbf{28\,859,15}$$

Période	Capital restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuités
1	100 000	6 000	22 859.15	28 859.15
2	77 140.85	4 628.45	24 230.7	28 859.15
3	52 910.15	3 174.6	25 684.54	28 859.15
4	27 225.61	1 633.53	27 225.61	28 859.15

Exemple

Un emprunt de 600 000 dh est remboursable au moyen de deux versements annuels à échéances respectives de 1 an et 2 ans, et dont les montants sont dans l'ordre, 300 000 dh et 393 453.75 dh.

Présenter le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Résolution

Nous cherchons le taux d'emprunt (i)

Nous pouvons écrire :

$$600\,000\,(1+i)^2 = 300\,000\,(1+i) + 393\,453.75$$

Posons (1+i) = x. on obtient alors, après simplifications et transformations.

$$2x^2 - x - 1.3115125 = 0$$

$$x = 1{,}0975 = 1 + i \text{ soit } i = 0{,}0975$$

Période	*Capital restant dû*	*Intérêt*	*Amortissement*	*Annuités*
1	*600 000*	*58 800*	*241 500*	*300 000*
2	*358 800*	*34 953,75*	*358 000*	*393 453,75*