Chapitre II :

Loi de probabilité d’une variable aléatoire

Section 1. La terminologie et les axiomes

1.1. La terminologie

1) expérience aléatoire :

C'est une expérience dont l'issue ne pourrait pas être déterminée avec certitude à l'avance.

2) Espace fondamental :

C'est L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. On le note par Ω.

Exemple: Si on considère l'expérience aléatoire consistant au lancement d'une pièce de monnaie alors Ω= {Pile, Face}.

3) Evénement :

C'est une partie de Ω. Autrement dit c'est un sous-ensemble constitué de résultats possibles de Ω.

4) **Eventualité** :

C'est un événement constitué d'un seul élément (ou résultat possible), la plupart du temps , au lieu d'écrire $\{e_1\}$, on écrit e_1 sans { }.

5) Evénement certain :

C'est l'événement constitué de toutes les éventualités de Ω. Autrement dit c'est Ω en entier.

6) Evénement impossible :

C'est L'événement ne contenant aucune éventualité on le note par ∅.

7) Evénement contraire

Soit A un événement de Ω. L'événement contraire de A qu'on note par $\bar{A}$ est l'ensemble des éventualités de Ω n'appartenant pas à A. Autrement dit c'est le complémentaire de A dans Ω.

1.2. Les opérations définies sur les événements :

$A \cap B$: signifie que A et B se réalisent simultanément, c'est-à-dire en même temps

$A \cup B$: signifie qu'au moins un des événements A ou B se réalise

$A - B$: signifie que A se réalise seul $(A - B = A \cap \overline{B})$

$A \Delta B$: Un seul des événements A ou B se réalise

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A - B) \cup (B - A)$$

$A \subset B$: signifie que la réalisation de A entraine la réalisation de B. On note aussi $A \subset B$ par $A \Rightarrow B$ et se lit A entraine B (ici $\Rightarrow$ n'a rien à voir avec implique de la logique).

$A \Leftrightarrow B$: signifie que $A \subset B$ et $B \subset A$. On dit alors que A et B sont équivalents. C'est-à-dire que la réalisation de A entraine la réalisation de B et la réalisation de B entraine la réalisation de A.

$$\text{si} \quad A \Leftrightarrow B \quad \text{alors} \quad p(A) = p(B)$$

1.3. La loi de Morgan généralisée :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace Ω. Alors on a :

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

1.4. Définition d'une Algèbre

Soit Ω un espace fondamental. Soit Δ un ensemble de parties de Ω

$(\Delta \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que l'ensemble Δ forme une algèbre si elle vérifie les conditions suivantes :

1- $\emptyset \in \Delta$
2- Si $A \in \Delta$, $\overline{A} \in \Delta$ (si 2 est vérifiée on dit alors que Δ est fermé pour la complémentation)
3- $A_1 \in \Delta, \ldots, A_n \in \Delta$ alors :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Delta$$

(si la condition 3 est vérifiée, on dit alors que Δ est fermé pour la réunion d'une famille fini d'événements).

Propriété :

Si Δ est fermé par rapport à la complémentation et la réunion alors il est fermé par rapport à l'intersection.

Preuve :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une famille d'événements de Δ c-à-d.

$$(A_1 \in \Delta, A_2 \in \Delta, \ldots, A_n \in \Delta)$$

d'après 2) on a : $\overline{A_1} \in \Delta, \overline{A_2} \in \Delta, \ldots \ldots . \overline{A_n} \in \Delta$

d'après 3) on a : $\left(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}\right) \in \Delta$

d'où $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}} \in \Delta$ d'après 2)

Or:

$$\overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ \dots \ \cup \overline{A_n}} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \ A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n$$

Exemple d'algèbre:

Si Ω est fini, Δ= $\mathcal{P}(\Omega)$ est une algèbre définit sur Ω.

Définition d'une σ – algèbre :

Soit Ω un espace fondamental quelconque.

Soit Δ un sous ensemble de parties de Ω (Δ ⊂ $\mathcal{P}$ (Ω)).

Un ensemble Δ de parties de Ω est une σ - algèbre s'il vérifie :

1- ∅ ∈ Δ
2- Si A ∈ Δ , $\overline{A}$ ∈ Δ
3- Si $A_1 \in \Delta$, $A_2 \in \Delta, \dots, A_n \in \Delta \dots$ $\quad alors \ \ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \ \Delta$

Propriétés :

1- Toute σ - algèbre de Ω est une algèbre de Ω (la réciproque n'est pas vraie).
2- On montre qu'une σ - algèbre fermée pour la complémentation et la réunion est aussi fermée par rapport à l'intersection (la preuve est similaire à celle que nous avons donné dans le cas d'une famille finie de parties de Δ)

Espace Probabilisable :

On appelle espace probabilisable un couple (Ω, Δ) formé d'un espace fondamental Ω et d'une σ - algèbre Δ.

Espace probabilisé :

On appelle espace probabilisé, un espace probabilisable sur lequel on définit une probabilité.

1.5. Définition d'une probabilité :

Soit (Ω, Δ) un espace probabilisable.

On dit qu'une application P définit de Δ vers [0,1] est une probabilité si elle vérifie les axiomes suivants :

1- P (Ω)= 1 (axiome de normalisation)
2- ∀ A ∈ Δ, p(A) ≥ 0
3- Pour toute famille $A_1, A_2, \dots, A_n$ d'événements de Δ deux à deux disjoints on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Le triplet (Ω, Δ, P) est appelé un espace probabilisé.

Remarque :

L'axiome 3 s'appelle axiome d'additivité, il existe une formulation plus générale de cet axiome appelée « axiome de σ – additivité ». Elle s'énnonce comme suit:

Pour toute famille infinie $A_1, A_2, \dots, A_n \dots$ d'événements deux à deux disjoints on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \mathrm{A_i}\right) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A_i})$$

Propriétés :

Soit P une probabilité définit de Δ vers [0,1], nous pouvons établir les propriétés suivantes :

1- p(∅)=0

Preuve : on a Ω ∪ ∅ = Ω

p (Ω ∪ ∅) = p(Ω) =1

$p(\Omega \cup \emptyset) = p(\Omega) + p(\emptyset) = 1$ (d'après l'axiome 3)

$p(\emptyset) = 1 - p(\Omega) = 1 - 1 = 0$

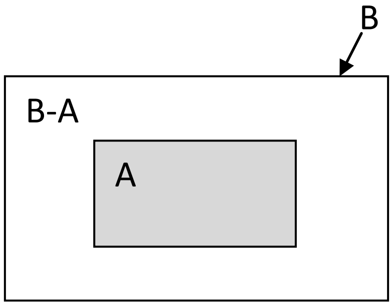
2- $p(A) = 1 - p(\overline{A})$

Preuve: on a $(A \cup \overline{A}) = \Omega$

$$p(A \cup \overline{A}) = p(\Omega) = 1$$

$$p(A \cup \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A}) = 1$$ (d'après l'axiome 3)

d'où $p(A) = 1 - p(\overline{A})$



$B = A \cup (B - A)$

3- Soient $A \in \Delta$ et $B \in \Delta$

Si $A \subset B$ alors $p(A) \leq p(B)$

Preuve : $p(B) = p(A) + p(B - A)$

Puisque $p(B - A) \geq 0$ alors $p(B) \geq p(A)$

4- Théorème des probabilités totales :

a- Si A et B sont deux événements quelconques de Δ (C'est-à-dire disjoints ou non)

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

b- Si A, B et C sont des événements quelconques de Δ.

$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$

c- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements quelconques de Δ alors :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\sum_{i<j} p(A_i \cap A_j) + \sum\sum\sum_{i<j<K} p(A_i \cap A_j \cap A_K) + \cdots + \cdots + (-1)^{n-1} p(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

5- Soit Ω un espace fondamental fini

Soit A= {e_1,…, e_k} ; A est un événement. D'après l'axiome des probabilités totales on a : $\mathrm{P(A)} = \mathrm{P}\ (\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \ldots\ldots..\cup \{e_k\})$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(\{e_i\}) \quad car \begin{cases} \{e_i\} \cap \{e_j\} = \emptyset \\ \forall\, i, j = 1, \ldots, k \\ et\ i \neq j \end{cases}$$

6- Soit $\Omega = \{e_1 \ldots\ldots., e_n\}$ (Ω est un espace fondamental fini)

Soit $\mathrm{A} = \{e_1, \ldots\ldots., e_k\}$

On suppose que $p(e_j) = \frac{1}{n}\ \forall\ j = 1, 2, \ldots, n$ ($\Leftrightarrow$ équiprobabilité)

Alors :

$$\mathrm{P(A)} = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(\{e_i\}) = \frac{\mathrm{card\ A}}{\mathrm{card\ \Omega}} = \frac{k}{n}$$

Preuve :

$$p(A) = \sum_{i=1}^{k} P(\{e_i\}) = \sum_{i=1}^{k} P(e_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{\text{k fois}}$$

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{card\ A}{card\ \Omega}$$

Donc lorsqu'il y a équiprobabilité des résultats possibles nous retrouvons la formule classique d'une probabilité d'un événement.

7- Inégalité de Boole :

Soient $A_{1,}A_2 \ldots\ldots A_n$ n événements quelconques pas forcément disjoints deux à deux alors on a:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Exemple de σ - algèbre (tribu-borélienne) :

Soit Ω = IR. Soit la famille ((Δ_i) avec i ∈ I) des σ - algèbres sur IR qui contiennent tous les intervalles de IR ; alors $\mathcal{B}(IR) = \bigcap \quad \Delta_i$ avec i ∈ I est une $\sigma -$ algébre sur IR. $\mathcal{B}(\mathrm{IR})$ s'appelle la tribu borélienne. Cet ensemble comme nous allons le voir joue un rôle très important en théorie des probabilités. Il est intéressant de souligner que dans la littérature probabiliste, très souvent, les auteurs appellent les événements de $\mathcal{B}(\mathrm{IR})$ comme étant des boréliens.

1.6 Evénements incompatibles :

On dit que deux événements A et B sont incompatibles si elles ne peuvent pas se réaliser simultanément. En langage de la théorie des ensembles, l'incompatibilité de deux événements A et B est équivalent à $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire que A et B sont disjoints.

1.7 Théorème des probabilités composées :

1.7.1 Définition

Soient deux événements A et B tel que P(A) ≠0. On appelle probabilité conditionnelle de B liée à A la probabilité P (B/A), et on lit : probabilité de B sachant A ou encore probabilité de B si A.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

De même, si P(B) ≠ 0 on définit P (A/B) par :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

P(A/B) se lit : probabilité de A sachant B ou encore probabilité de A si B

1.7.2 Théorème de probabilités composées :

D'après les deux définitions précédentes, si P(A)≠0 et P(B)≠0, alors

$$P(A \cap B) = P(B/A).P(A) = P(A/B).P(B)$$

1.7.3 Indépendance des événements :

Deux événements A et B sont indépendants si :

$$\mathrm{P(B/A) = P(B) \quad ou\ encore \quad P(A/B) = P(A)}$$

Propriété : A partir de cette définition, si deux événements A et B sont indépendants alors $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Exercice : On jette un dé symétrique.

Soit A : « avoir un nombre impair »

B : « avoir un nombre inférieur à 3 »

C : « avoir un nombre pair »

a- Ecrire en extension A ; B ; C ; A∩B ?
b- Calculer P (A/B) ; P (A/C) ; P (B/A) ?
c- A et B sont ils indépendants ?
d- A et C sont ils indépendants ?

Solution :

a- A= {1, 3, 5} ; B= {1, 2, 3} ; C= {2, 4, 6} ;
A∩B= {1, 3}

b-

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\emptyset)}{\frac{3}{6}} = 0$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

c- P (A/B)=2/3 ≠ P(A)=3/6.
P (B/A)=2/3 ≠ P(B)=3/6
Autre façon : P(A∩B)=2/6 ≠ P(A).P(B)=(3/6)x(3/6)=9/36
Donc A et B ne sont pas indépendants.

P(A/C)=0 ≠ P(A)=3/6
P(C/A)=0 ≠ P(C)=3/6
Donc A et C ne sont pas indépendants.

Propriété :

a- Si deux événements A et B sont indépendants alors A et $\overline{\mathrm{B}}$ ou encore $\overline{\mathrm{A}}$ et B ou encore $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$ sont indépendants.

Preuve :

Démontrons la première proposition, et, les deux autres seront laissées au soin du lecteur de les vérifier à titre d'exercices.

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A).P(\bar{B}/A)}{P(\bar{B})}$$

$$= P(A)\frac{[1 - P(B/A)]}{P(\bar{B})} = P(A)\frac{[1 - P(B)]}{P(\bar{B})}$$

Donc : $P(A/\bar{B}) = P(A)$

Remarque importante : Il ne faut pas confondre la notion d'incompatibilité avec celle de l'indépendance :

i. La notion d'incompatibilité est intrinsèque aux événements c'est-à-dire à des ensembles d'éventualités, alors que la notion d'indépendance est propre aux probabilités des événements.

   Plus précisément, la notion d'indépendance est fondée sur la définition d'une probabilité conditionnelle qui suppose que P(A) ≠0 et P(B) ≠0 dans le cas des événements A et B.

Donc, si

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{P(A)} \neq 0 \\ \mathrm{P(B)} \neq 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{alors } \mathrm{P(A).P(B)} \neq 0$$

Donc : indépendance $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B) \neq 0$

Incompatibilité $\Leftrightarrow (A \cap B) = \emptyset \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0 \neq P(A).P(B)$

Donc l'indépendance suppose nécessairement la non-incompatibilité.

ii. Si deux événements A et B sont incompatibles alors :

$$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap B) = 0 \ \forall P(A);\ \forall P(B)$$

Cas particulier 1 : Si p(A)>0 et p(B)>0 alors p(A) p(B)>0

alors $p(A \cap B) = 0 \neq P(A)\,P(B)$

donc pour ce cas particulier

$$\text{incompatibilité} \Longrightarrow \text{dépendance}$$

Cas particulier 2 : Si P(A)=P(B)=0 alors p(A).p(B)=0

Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0$

Donc dans ce cas là on a :

$$\text{incompatibilité de A et B} \Leftrightarrow \text{indépendance de A et B}$$

iii. Une autre ressemblance entre ces deux notions est le fait qu'elles sont toutes les deux symétriques et non transitives :

__**Symétrie :**__

A est incompatible avec B $\Leftrightarrow$ B est incompatible avec A

A est indépendante avec B $\Leftrightarrow$ B est indépendante avec A

__**Non transitivité :**__

Adoptons les abréviations **inc** et **ind** pour incompatible et indépendant respectivement :

$$\left.\begin{array}{l}\text{A inc B}\\ \text{B inc C}\end{array}\right\} \not\Longrightarrow \text{A inc C}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{A ind B}\\ \text{B ind C}\end{array}\right\} \not\Longrightarrow \text{A ind C}$$

Donc en conclusion : Incompatibilité et indépendance sont deux notions discernables par leur définition quoiqu'il existe des points de ressemblances très minimes.

1.7.4 Cas de trois événements :

Propriété :

Soient trois événements A, B, et C tels que :

$P(A) \neq 0$; $P(B) \neq 0$ et $P(C) \neq 0$. Nous pouvons écrire des égalités semblables à celle que nous avons déjà vue pour deux événements :

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B/A).P(C/A \cap B) = P(A)P(C/A)P(B/A \cap C) \\
&= P(B)P(C/B)P(A/B \cap C) \\
&= P(C)P(A/C)P(B/A \cap C) \\
&= P(C)P(B/C)P(A/B \cap C)
\end{aligned}
$$

Preuve :

Ces égalités peuvent être trouvées à partir de $P(C/A \cap B)$, $P(B/A \cap C)$ et $P(A/B \cap C)$.

1.8 Théorème de Bayes :

1.8.1 Système complet d'événements :

Soit Ω un espace fondamental. Une famille d'événements $C_1, C_2, \ldots, C_n$ forment un système complet d'événements de Ω si on a :

$$I = \{1,2,\ldots,n\}, \forall (i,j) \in I^2;\ C_i \cap C_j = \emptyset \text{ et } \bigcup_{i \in I} C_i = \Omega$$

Autrement dit, les événements $C_1, C_2, \ldots, C_n$ forment une partition de Ω.

1.8.2 Enoncé du théorème :

Soit (Ω, Δ, P) un espace probabilisé. Soit $C_1, C_2, \ldots, C_n$ un système complet d'événements de Ω.

Soit T un événement de Ω tel que : $T \cap C_i \neq \emptyset \ \forall\, i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$

Par exemple T peut désigner le résultat d'un test ou d'une expérience.

T peut avoir pour causes la réalisation de C_1 ou de C_2 ou … ou de C_n. On suppose qu'on connait les probabilités de réalisation de l'événement T sachant que la cause C_i est réalisée. Ces probabilités s'écrivent $P(T/C_i)$ et on les appelle les probabilités apriori. On suppose que les probabilités de réalisation de C_i

(c-à-d $P(C_i)$ $\forall$ i) sont connues d'avance. Le problème est de déterminer les probabilités à-posteriori $P(C_i/T)$, $\forall$ i.

Le théorème de Bayes a pour objet la détermination de ces probabilités.

Théorème :

Soit (Ω, Δ, P) un espace probabilisé. Soit $C_1, C_2, \ldots, C_n$ un système complet d'événements de Ω.

Soit $\mathrm{T} \subset \Omega$ tel que: $\mathrm{P(T)} \neq 0$; $\mathrm{P(T/C_i)}$ et $\mathrm{P(Ci)}$

$$\forall\, \mathrm{i} \in \mathrm{I} = \{1, 2, \ldots, \mathrm{n}\} \text{ sont connues alors:}$$

$$\mathrm{P(C_i/T)} = \frac{\mathrm{P(C_i)P(T/C_i)}}{\sum \mathrm{P(C_i)P(T/C_i)}}$$

Preuve :

$$\mathrm{P(C_i/T)} = \frac{\mathrm{P(C_i \cap T)}}{\mathrm{P(T)}} = \frac{\mathrm{P(C_i)P(T/C_i)}}{\mathrm{P(T)}}$$

Remarquons que : $\mathrm{T} = \mathrm{T} \cap \Omega = \mathrm{T} \cap (\mathrm{C_1} \cup \mathrm{C_2} \cup \ldots \cup \mathrm{C_n})$

$$\mathrm{T} = (\mathrm{T} \cap \mathrm{C_1}) \cup (\mathrm{T} \cap \mathrm{C_2}) \cup \ldots \cup (\mathrm{T} \cap \mathrm{C_n})$$

$$\mathrm{P(T)} = \mathrm{P}[(\mathrm{T} \cap \mathrm{C_1}) \cup (\mathrm{T} \cap \mathrm{C_2}) \cup \ldots \cup (\mathrm{T} \cap \mathrm{C_n})]$$

On peut vérifier facilement que : $\forall (i,j) \in I^2 \; et \; I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$(\mathrm{T} \cap \mathrm{C_i}) \cap \left(\mathrm{T} \cap \mathrm{C_j}\right) = \mathrm{T} \cap \mathrm{C_i} \cap \mathrm{C_j} = \emptyset$$

Donc d'après le théorème des probabilités totales on a :

$$\mathrm{P(T)} = \mathrm{P}[\bigcup_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} (\mathrm{T} \cap \mathrm{C_i})] = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{P(C_i \cap T)}$$

$$\mathrm{P(T)} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{P(C_i)P(T/C_i)}$$

$$\text{D'où} \qquad P(C_i/T) = \frac{P(C_i)P(T/C_i)}{\sum P(C_i)P(T/C_i)}$$

Exercice :

Soient deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules blanches et noires comme indiqué dans le tableau suivant :

Couleurs / Urnes	Boules blanches	Boules noires	Total
U_1	6	4	10
U_2	4	6	10
Total	10	10	

On tire au hasard une urne. Les deux urnes ont la même probabilité d'être choisit. Puis on tire au hasard une boule de l'urne choisit.

U_1 : L'événement « choisir l'urne U_1 »

U_2 : L'événement « choisir l'urne U_2 »

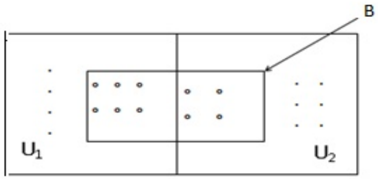
B : L'événement « avoir une boule blanche »

N : L'événement « avoir une boule noire »

Calculer : a- P (U_1/B) ; P (U_2/B)

b- P (U_1/N) ; P (U_2/N)

Solution :



$P(B/U_1)$=0.6 ; $P(U_1)$=0.5

$P(B/U_2)$=0.4 ; $P(U_2)$=0.5

a- $P(U_1/B) = \frac{P(B\cap U_1)}{P(B)} = \frac{P(U_1)P(B/U_1)}{P(U_1)P(B/U_1)+P(U_2)P(B/U_2)}$

$$P(U_1/B) = \frac{0.6x0.5}{(0.6x0.5) + (0.4x0.5)} = \frac{0.6}{1} = 0.6$$

$$P(U_1/B) = 0.6 \Rightarrow P(U_2/B) = 1 - P(\overline{U_2}/B) = 1 - P(U_1/B) = 0.4$$

b-

$$P(U_1/N) = \frac{P(N\cap U_1)}{P(N)} = \frac{P(U_1)P(N/U_1)}{P(U_1)P(N/U_1) + P(U_2)P(N/U_2)}$$

$P(N/U_1)$=0.4 ; $P(U_1)$=0.5

$P(N/U_2)$=0.6 ; $P(U_2)$=0.5

$$P(U_1/N) = \frac{0.4x0.5}{(0.4x0.5) + (0.6x0.5)} = 0.4$$

$$P(U_1/N) = 0.4 \Rightarrow P(U_2/N) = 1 - P(\overline{U_2}/N) = 1 - P(U_1/N) = 0.6$$

Section 2 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire :

2.1 Définition :

2.1.1 Variable aléatoire :

Soit X une application de $(\Omega, \Delta, P) \longrightarrow (IR, \mathcal{B}(IR))$

X est une variable aléatoire si on a :

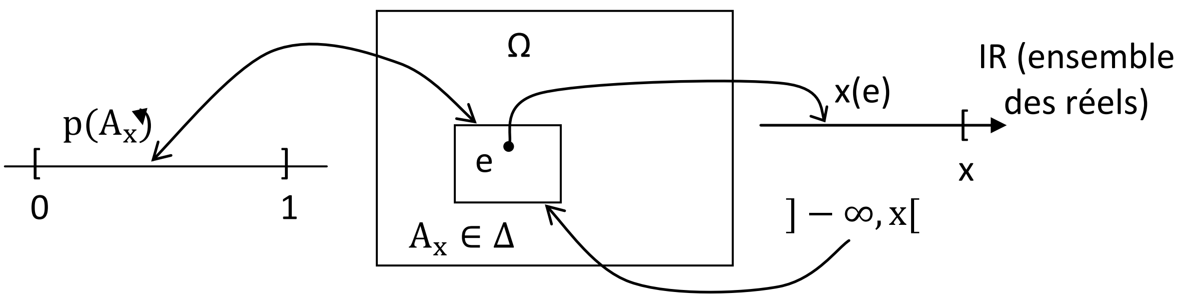
$$\forall\, x \in IR\,;\; A_x = X^{-1}(\,]-\infty, x[\,) \in \Delta$$

X(Ω) est appelée ensemble de définition de X. Dans la suite, on notera le domaine des valeurs de X par X(Ω) ou par D_X.

Remarquons que la définition précédente ne signifie pas que la fonction réciproque existe mais seulement que l'image réciproque A_x de x

appartient à Δ.

Schématiquement :



Soit e une éventualité de Ω. Soit X une variable aléatoire

$$e \in A_X \Leftrightarrow X(e) \in\,]-\infty, x\,[$$

$$e \in A_X \Leftrightarrow X(e) < x$$

2.1.2 Fonction de répartition :

Une fonction de répartition d'une variable aléatoire X est l'application qui associe à chaque intervalle$]-\infty, x[$ $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{IR}$. La probabilité de son image réciproque $A_X \in \Delta$. On note cette probabilité par F (x).

Autrement dit : F : IR $\longrightarrow$[0 ,1]

$$\mathrm{x} \longrightarrow \mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{A_x}) = \mathrm{P}(]-\infty, x[)$$

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} < x) = P(X(e) < x)$$

2.1.3 Propriétés :

La fonction F possède les propriétés et les conventions suivantes :

1- $\forall \quad x \in \mathrm{IR}; \quad 0 \leq \mathrm{F}(x) \leq 1$

2- $\lim_{\mathrm{x} \rightarrow +\infty} \mathrm{F}(\mathrm{x}) = 1$

3- $\lim_{\mathrm{x} \rightarrow -\infty} \mathrm{F}(\mathrm{x}) = 0$

4- F est monotone croissante :

si $\mathrm{x_2} \geq \mathrm{x_1}$ alors $\mathrm{F}(\mathrm{x_2}) \geq \mathrm{F}(\mathrm{x_1})$

5- F est continue à gauche des points de D_X : c.-à-d.

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \mathrm{F}(\mathrm{x} - \varepsilon) = F(\mathrm{x})$$

Preuve:

La propriété 1 résulte du fait que F(x) est une probabilité, les propositions 2 et 3 sont des conventions.

4- si $\mathrm{x_2} \geq \mathrm{x_1}$; $\quad \mathrm{F}(\mathrm{x_2}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} < \mathrm{x_2})$

$$F(x_1) = P(X < x_1)$$

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leq X < x_2)$$

Par axiome d'une probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{x_1} \leq \mathrm{X} < \mathrm{x_2}) \geq 0$ d'où $\mathrm{F}(\mathrm{x_2}) - \mathrm{F}(\mathrm{x_1}) \geq 0$

5- $$F(x) - F(x-\varepsilon) = P(x-\varepsilon \leq X < x)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} F(x) - F(x-\ \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} P(x-\varepsilon \leq X < x)$$

Si $\varepsilon \longrightarrow 0^+$on a $[\{X\ /\ \ x-\varepsilon \leq X < x\}] = \emptyset$

D'où $\lim_{\varepsilon \to 0^+} P(x-\varepsilon \leq X < x) = 0$

Donc $\lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x) - F(x-\varepsilon) = 0$

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} F(x-\varepsilon) = F(x)$$

2.1.4 Caractéristiques générales des variables aléatoires :

1 - Le mode : Le mode M_0 est la valeur de la variable ayant la plus grande probabilité.

2- Le moment centré d'ordre k :

$$m_k^c = E\left[(X - E(X))^k\right]$$

3- Le moment non centré d'ordre k :

$$m_k = E\left[X^k\right]$$

4- L'espérance mathématique :

$$\text{si dans 3 on pose } k = 1 \text{ on a} \quad m_1 = E(X)$$

5- La variance :

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

6- L'écart type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

7- Le coefficient de variation :

$$CV(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)}$$

8- Le moment factoriel d'ordre k :

Soit X une variable aléatoire quelconque :

$$M_k^F = E[X(X-1)\ldots(X-k+1)]$$

9- Fonction génératrice des moments :

La fonction génératrice est définit par :

$$g_x(u) = E[u^x]$$

Si on pose u=e^t on a :

$$g(t) = E(e^{tx})$$

Remarque : Suivant la nature de F et de $X(\Omega)$, nous pouvons classer les variables aléatoires en plusieurs types : les variables aléatoires discrètes, les variables aléatoires absolument continues et les variables aléatoires mixtes. Dans ce livre, nous traitons surtout les deux premiers types.

2.2 Cas d'une variable aléatoire discrète :

2.2.1 Définition :

Soit X une variable aléatoire définit de Ω vers $X(\Omega) \subset IR$. X est une variable aléatoire discrète si $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable c.-à-d. si : $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ou $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Dorénavant $X(\Omega)$ va être noté aussi D_X

Fonction de répartition :

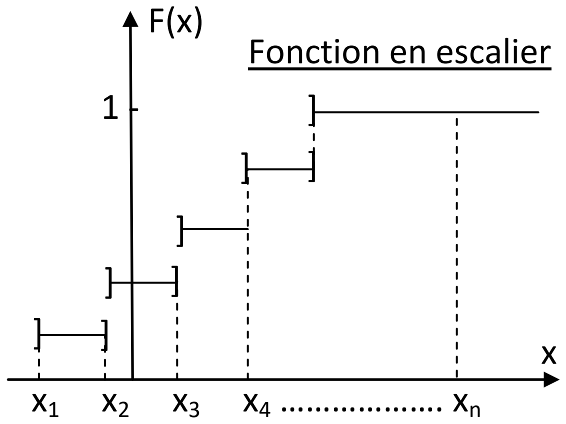
Soit X une variable aléatoire discrète avec $D_X = \{x_1, \dots, x_n\}$

$$F(x_i) = P(X < x_i) = \sum_{k < x_i} P(X = k) \quad \text{avec} \quad k \in D_X$$

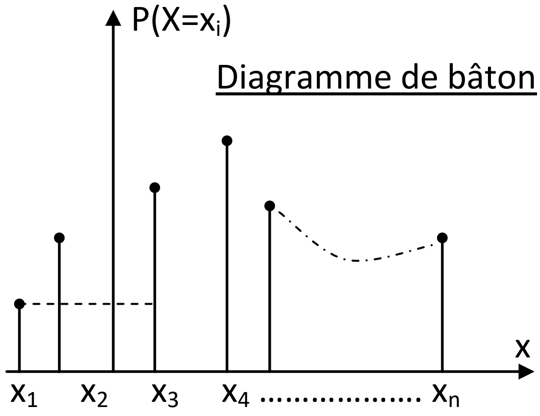
$$= p(X = x_1) + p(X = x_2) + \cdots + p(X = x_{i-1})$$

2.2.2 Représentation graphique :

Représentation graphique de la courbe cumulative

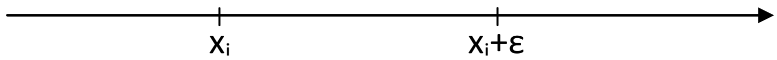


Représentation graphique de la loi de probabilité



2.2.3 Valeur du saut de F(x) au point X = x_i avec $x_i \in D_x$:

$$F(x_i + \varepsilon) - F(x_i) = P(x_i \leq X < x_i + \varepsilon)$$



Faisons tendre $\varepsilon \to 0^+$ alors $[\{X/\ \ x_i \leq X < x_i + \varepsilon\}] = \{x_i\}$

D’où

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x_i + \varepsilon) - F(x_i) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} P(x_i \leq X \leq x_i + \varepsilon)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x_i + \varepsilon) - F(x_i) = P(X = x_i)$$

et puisque $P(X = x_i) \neq 0 \quad \forall\, x_i \in D_X$

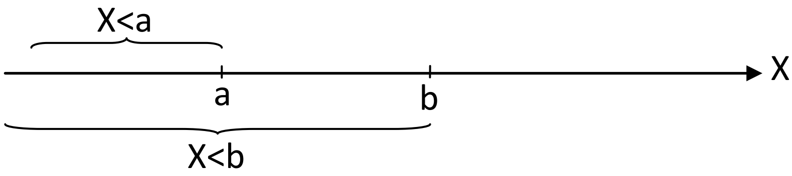
Alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x_i + \varepsilon) - F(x_i) \neq 0$$

Donc F n'est pas continu à droite des points de D_X et elle effectue des sauts de valeur $P(X = x_i)$ aux points d'abscisse $x_i \quad \forall\, x_i \in D_X$

2.2.4 Probabilité d'un intervalle :

$$P(a \le X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a) = \sum_{k=a}^{b-1} P(X = x_i)$$



2.2.5 Caractéristiques d'une variable aléatoire discrète

1 - Le mode : C'est la valeur de la variable ayant la plus grande probabilité ; si M_0 est le mode alors $P(X = M_0) \ge P(X = x);\ \forall\, x \in D_x$

2- Le moment centré d'ordre k :

$$m_k^c = E\left[(X - E(X))^k\right] = \sum_{x_{i \in D_x}} \left(x_i - E(X)\right)^k . P(X = x_i)$$

3- Le moment non centré d'ordre k :

$$m_k = E\left[X^k\right] = \sum_{x_{i \in D_x}} x_i{}^k P(X = x_i)$$

4- L'espérance mathématique :

$$\text{Pour } k = 1 \qquad m_1 = E(X) = \sum_{x_{i \in D_x}} x_i\, P(X = x_i)$$

5- La variance :

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \sum x_i{}^2\, P(X = x_i) - \left(\sum x_i\ \ P(X = x_i)\right)^2$$

6- L'écart type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

7- Le coefficient de variation :

$$CV(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)}$$

8- Le moment factoriel d'ordre k :

$$M_k^F = E[X(X-1)\dots(X-k+1)]$$

X est une variable aléatoire discrète donc :

$$M_k^F = \sum_{x=0}[x(x-1)\dots(x-k+1)P_x]$$

$$M_k^F = 0\,p_0 + 0\,p_1 + \dots + 0\,p_{k-1} + \sum_{x=k} x(x-1)\dots(x-k+1)P_x$$

$$M_k^F = \sum_{x=k} x(x-1)\dots(x-k+1)P_x$$

$$M_k^F = \sum_{x=k} \frac{x!}{(x-k)!}\,P_x$$

Nous pouvons exprimer les moments factoriels en fonction des moments simples comme suit :

$$M_1^F = E(X) = m_1$$

$$M_2^F = E[X(X-1)] = E(X^2) - E(X) = m_2 - m_1$$

....

$\dots$ etc

Nous pouvons exprimer les moments simples en fonction des moments factoriels comme suit :

$$m_1 = M_1^F;\ m_2 = M_2^F + m_1 = M_2^F + M_1^F;\quad \dots \text{etc}$$

9- Fonction génératrice des moments :

La fonction génératrice est définit par :

$$g_x(u) = E[u^x]$$

Si on pose u=e^t on a :

$$g(t) = E(e^{tx})$$

Pour les calculs, la première expression apparait plus simple.

Propriétés :

1.

$$g_x(0) = 0 \;\; ; \;\; g_x(1) = 1$$

2.

$$g_x^k(1) = M_k^F$$

Celle propriété signifie que la dérivée d'ordre k de $g_x(1)$ fournit le moment factoriel d'ordre k, et inversement, le moment factoriel d'ordre k donne la dérivée à l'ordre k de $g_x(1)$

3. Si on pose u=1+v alors nous obtenons le développement suivant au voisinage de v=0 :

$$g(1+v) = g(1) + \frac{v}{1!}\, g'(1) + \frac{v^2}{2!}\, g''(1) + \; \ldots$$

$$g(1+v) = 1 + \frac{v}{1!}\, M_1^F + \frac{v^2}{2!}\, M_2^F + \frac{v^3}{3!}\, M_3^F + \cdots$$

$$g(1+v) = 1 + \sum_{k=1} \frac{v}{k!}\, M_k^F = \sum_{k=0} \frac{v^k}{k!}\, M_k^F$$

4. Pour u≤1 ; g_x (u) est une fonction en u non décroissante et continue car la série

$$\sum_{x \in D_X} P_x\, u^x$$

est absolument et uniformément convergente en u :

$$g_x(u) = \sum_{x \in D_X} P_x\, u^x \leq \sum_{x \in D_X} P_x = 1$$

Preuves :

1. Il suffit de poser dans la définition u=0 et u=1 :

Si <u>on pose u=0 :</u>

$$g_x(0) = \sum_{x \in D_X} P_x\, 0^x = 0$$

Si <u>on pose u=1 :</u>

$$g_x(1) = \sum_{x \in D_X} P_x\, 1^x = 1$$

2.

$$g_X^k(u) = \frac{d^k g_X(u)}{(du)^k} = \frac{d^k(\sum P_x u^x)}{(du)^k} = \sum p_x \frac{d^k u^x}{(du)^k}$$

$$\frac{du^x}{du} = x\, u^{x-1}$$

$$\frac{d^2 u^x}{(du)^2} = x(x-1)\, u^{x-2}$$

$$\frac{d^3 u^x}{(du)^3} = x(x-1)(x-2)\, u^{x-3}$$

$$.$$

$$.$$

$$\ldots etc$$

$$\frac{d^k\, u^x}{(d\, u)^k} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-(k-1))u^{x-k}$$

$$g_X^k(1) = \sum p_x\, x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)1^{x-k} = M_k^F$$

La troisième et la quatrième propriété seront admises à cette étape

2.3 Cas d'une variable aléatoire absolument continue :

2.3.1 Définition :

Une variable aléatoire est dite absolument continue si :

1. sa fonction de répartition F(x) est continue et dérivable, (sauf éventuellement en un nombre fini de points de D_X)
2. son domaine de définition est un intervalle ou une réunion d'intervalles de IR.

2.3.2 Probabilité attaché en un point :

Propriété :

Soit X une variable aléatoire absolument continue on a P(X=a)=0 $\forall a \in D_X$

Preuve : $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$ (Voir plus haut)

faisons tendre $b \to a$ dans les deux membres de l'égalité, on a :

Pour le membre de gauche :

$$\lim_{b\to a} P\,(a \leq X < b) = P(X = a) \quad \text{car } \{X/a \leq X < b\} = \{X = a\} \quad \text{si } b \to a$$

Pour le membre de droite :

$$\lim_{b\to a} F(b) - F(a) = F(a) - F(a) = 0$$

Car $\lim_{b\to a} F(b) = F(a)$ puisque F est continue

D'où $\quad P(a \leq X < b) = P(X = a) = \lim_{b\to a} F(b) - F(a) = 0$

Donc $\quad P(X = a) = 0 \quad \forall\, a \in D_X$

2.3.3 Densité moyenne linéaire sur un intervalle :

Définition :

Soit X une variable aléatoire absolument continue.
La densité linéaire moyenne de probabilité sur l'intervalle [x, x+h [est donnée par la quantité :

$$D(x, x + h) = \frac{F(x + h) - F(x)}{h}$$

2.3.4 Densité linéaire de probabilité en un point x :

Définition :

La densité linéaire de probabilité au point d'abscisse x est donnée par :

$$f(x) = \lim_{h\to 0} D(x, x + h) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h}$$

D'où f(x) = F'(x) si X est une variable aléatoire absolument continue.

Propriété :

a. $\forall\, x \in D_X\, ;\ f(x) \geq 0$
b. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Preuve :

a. F est définit sur IR et elle est monotone croissante sur ce domaine donc :
$F'(x) = f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in D_X \;\; (et\ D_X \subset IR)$
b. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$

2.3.5 Probabilité d'un intervalle :

On a vue que :

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

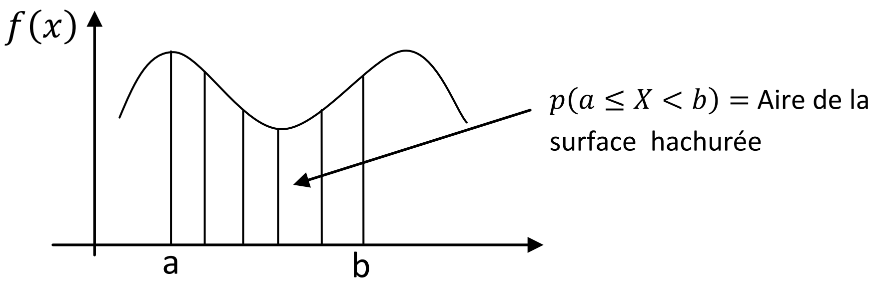
$$f(x) = F'(x)$$

Donc F est une primitive de f alors $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

Interprétation géométrique :

Nous obtenons une interprétation géométrique très intéressante.

En effet $P(a \leq X < b)$ est l'aire de la surface limitée par la courbe, les droites verticales passant par les abscisses a et b , et ,l'axe des abscisses



Remarque importante :

puisque $\mathrm{P(X = a) = P(X = b) = 0}\ \forall\ \mathrm{a} \in \mathrm{D_X};\ \forall\ \mathrm{b} \in \mathrm{D_X}$

alors $\mathrm{P(a \leq X} < b) = \mathrm{P(a} < X \leq b) = \mathrm{P(a} < X < b) = \mathrm{P(a \leq X \leq b)}=$

$$= \int_a^b \mathrm{f(x)dx}$$

2.3.6 Fonction de répartition :

On a vu que : $\mathrm{P(a \leq X} < b) = \mathrm{F(b) - F(a)} = \int_a^b \mathrm{f(x)dx}$

F(x)=P(X<x)

On sait que : $F(-\infty) = 0$ (par convention)

d'où F(x) =P(X<x) $= \mathrm{F(x) - F(-\infty)} = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{f(x)dx}$

donc $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

Remarque :

t dans le dernier intégral est une variable muette désignant la variable d'intégration. Il est préférable de distinguer cette dernière de x qui est la borne sup de l'intervalle d'intégration, et l'argument de la fonction de répartition.

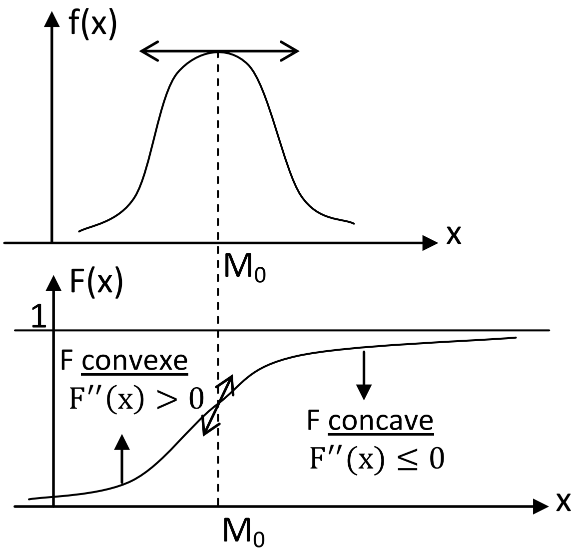
2.3.7 Caractéristiques d'une variable aléatoire absolument continue :

1) le mode : Pour une variable aléatoire absolument continue, le mode est donné par le maximum de la fonction de densité de probabilité f(x).

Donc si M_0 est le mode alors :

$$f'(M0) = 0 \text{ et } f''(M0) < 0 \Leftrightarrow F''(M_0)=0 \text{ et } F'''(M_0) < 0$$

Exemple :



Au point d'abscisse M_0 la fonction f admet un maximum

Au point d'abscisse M_0 la courbe de F(x) admet un point d'inflexion

2) L'espérance mathématique :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx$$

Plus généralement si Y=g(x) alors : $E\big(g(x)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

3) Le moment non centré d'ordre k :

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^k f(x)dx$$

4) Le moment centré d'ordre k :

$$m_k^c = E[(X - E(X))^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k f(x)dx$$

5) La variance et l'écart type :

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

2.3.8 Loi de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue :

On admet que pour une variable aléatoire absolument continue, la loi de probabilité est donnée par sa densité ou par sa fonction de répartition

(car F'(x) = f(x))

Indépendance totale :

* On dit que deux événements A_1, A_2 sont totalement indépendants

(ou tout simplement indépendants) si $p(A_1 \cap A_2) = p(A_1)\, p(A_2)$

* On dit que trois événements A_1, A_2, A_3 sont totalement indépendants si les égalités suivantes sont vérifiées

$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1)\, p(A_2)$

$p(A_1 \cap A_3) = p(A_1)\, p(A_3)$

$p(A_2 \cap A_3) = p(A_2)\, p(A_3)$

$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1)\, p(A_2)\, p(A_3)$

D'une manière plus concise A_1, A_2, A_3 sont totalement indépendants si on a

$$\forall\, I \subset \{1, 2, 3\} \qquad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} p(A_i)$$

Donnons maintenant la définition dans le cas général

Définition 1 : Indépendance des événements

Les événements A_1, A_2, A_3, … A_n sont totalement indépendants (ou indépendants) si $\forall\ I \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ on a :

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} p(A_i)$$

Définition 2 : indépendance des variables aléatoires

Considérons n variables aléatoires X_1, X_2, X_3, …, X_n définies sur un espace Ω ; nous disons qu'elles sont indépendantes si quelque soient les parties :

B_1, B_2, B_3, …, B_n de IR les événements « $"X_1 \in B_1"; "X_2 \in B_2"; \ldots; "X_n \in B_n"$ sont totalement indépendants au sens donné dans la définition 1.

Remarques : 1- Pour appliquer la définition 1 au cas des variables aléatoires il suffit de poser :

$A_1 = "X_1 \in B_1";\ A_2 = "X_2 \in B_2"; \ldots; A_n = "X_n \in B_n"$

3- Il s'ensuit en particulier de la définition 2 que : Si X_1, …, X_n sont indépendantes alors :

$$P(X_1 \in B_1 \cap \ldots \cap X_n \in B_n) = p(X_1 \in B_1)\ x \ldots x\ p(X_n \in B_n)$$

Propriété importante :

Si f_1, f_2, f_3, …, f_n sont des fonctions définies de IR vers IR si X_1, X_2, X_3, …, X_n sont des variables indépendantes alors leurs transformations $f_1 o X_1$, $f_2 o X_2$, $f_3 o X_3$, …, $f_n o X_n$ sont indépendantes aussi (ici le signe o signifie composition).

2.3.9 Propriétés générales :

Les propriétés suivantes sont valables pour les variables aléatoires absolument continues et les variables discrètes.

1- E(a) = a ; avec a une constante réelle
2- E(aX+b)= a E(X)+b ; $\forall$ (a,b) $\in IR^2$
3- $E(\sum_{i=1} \alpha_i X_i) = \sum_{i=1} \alpha_i E(X_i)$; avec $\alpha_i \in IR, \forall i$

4- $V(aX+b)= a^2 V(X)$; $\forall (a,b) \in IR^2$
5- $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$; $\sigma(X)$ est l'écart type de X
6- $Var(a X+b Y)=a^2 V(X)+b^2 V(Y)+2ab\, Cov(X,Y)$;
avec $Cov(X, Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$; $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
7- Si $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes alors $V(\sum \alpha_i) = \sum \alpha_i^2 V(X_i)$

2.3.10 Transformation d'une variable aléatoire :

Théorème :

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f(x) et soit Y=g(X) une transformation de X. Si g est une fonction bijective. Et si on désigne par h(y) la densité de la variable aléatoire Y alors

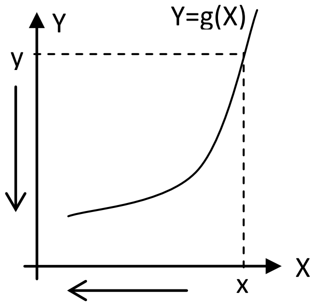
$$h(y) = f(g^{-1}(y) \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| ;\ g^{-1} \text{est la fonction réciproque de g}$$

si g n'est pas bijective et si $Y=g(X)=X^2$ alors

$$h(y) = \frac{f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

Preuve :

1[èr] cas : g monotone strictement croissante :



$$H(y) = P(Y < y) = P\left(X < g^{-1}(y)\right)$$

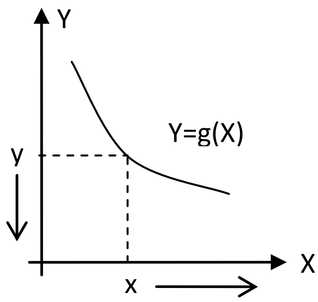
$$H(y) = F\left(g^{-1}(y)\right)$$

Dérivons H(y) pour trouver la densité h(y) :

$$h(y) = f\left(g^{-1}(y)\right)\frac{dg^{-1}(y)}{d(y)}$$

2[ème] cas : g monotone strictement décroissante

$$H(y) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - P(X < x)$$



Car x étant absolument continu P(X=x)=0 $\forall$x

$$H(y) = 1 - P\left(X < g^{-1}(y)\right) = 1 - F(g^{-1}(y))$$

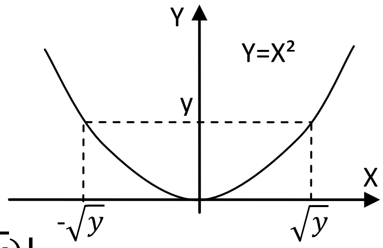
Dérivons H(y) pour obtenir la densité h(y).

$$h(y) = -f\left(g^{-1}(y)\right) \frac{d\, g^{-1}(y)}{dy} \geq 0 \quad \left(\text{car } \frac{d\, g^{-1}(y)}{dy} \leq 0\right)$$

D'où en regroupant les deux cas, nous obtenons la formule générale :

$$h(y) = f(g^{-1}(y)) \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$$

Maintenant supposons que Y=X²



$$H(y) = P(Y < y) = P(-\sqrt{Y} < X < \sqrt{Y})$$

$$= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

$$H'(y) = h(y) = f(\sqrt{y}) \left|\frac{d\sqrt{y}}{dy}\right| - f(-\sqrt{y}) \left|\frac{d(-\sqrt{y})}{dy}\right|$$

$$h(y) = \frac{f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} = \frac{f\left(\sqrt{y}\right) + f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

2.3.11 Théorème :

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même espace (Ω, Δ) alors:

1- $\lambda X + \mu Y$ est aussi une variable aléatoire $\forall \lambda, \forall \mu$
2- X.Y est une variable aléatoire

Section 3 : Lois de probabilité usuelles :

3.1 Lois discrètes :

3.1.1 Loi de Bernoulli :

Soit un ensemble de N éléments où chaque élément peut avoir deux caractères A ou B. soit X la variable aléatoire désignant le nombre de réalisations du caractère A à la suite d'un tirage.

$$D_X = \{0, 1\}$$

X =1 si A se réalise ;
X =0 si A ne se réalise pas.
P(X=1)=p ; P(X=0)=q.
X s'appelle la variable de Bernoulli.
Caractéristiques de la variable de Bernoulli :

$$E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = (1 \text{ x } p) + (0 \text{ x } q) = p$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X_i^2) = \sum x_i^2 \, P(X = x_i) = (1^2 \text{x } p) + (0^2 \text{x } q) = p$$

$$V(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

3.1.2 Loi Binomiale :

Soit un ensemble de N éléments où chaque élément peut avoir deux caractères A ou B. Soit l'expérience aléatoire consistant à tirer avec remise n éléments. Soit X la variable désignant le nombre de réalisations du caractère A à la suite du tirage d'un échantillon de n éléments avec remise.

Alors $X \leadsto B(n, p)$ P = probabilité d'avoir le caractère A dans chaque tirage.

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}$$

$$D_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$E(X) = np \quad ; \quad V(X) = npq$$

Le mode : La loi binomiale possède au mois une valeur modale vérifiant

$$np - q < M_0 < np + p$$

Règle pratique : La loi binomiale apparait à chaque fois qu'il ya répétition d'une épreuve aléatoire à deux issues dans les mêmes conditions de manière à ce que (la probabilité d'une issue) reste constante. Par exemple lorsqu'on répète un tirage avec remise, ayant deux issues n fois, les conditions précédentes sont vérifiées.

Preuves :

Pour la preuve nous utilisons les propriétés que nous avons déjà énoncées

$Rappelons\ d'abord\ que\ X \rightsquigarrow B(n,p)$ .Nous pouvons remarquer facilement que la variable binomiale est par définition le nombre de réalisations de A à la suite de n tirages avec remise. Le résultat de chaque tirage donne lieu à n variables de Bernoulli et le nombre de réalisations de A dans n tirages peut être obtenu par la somme des nombres de réalisations dans chaque tirage i, c'est-à-dire la somme des variables de Bernoulli X_i associé à chaque tirage i

Formellement on peut écrire que :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Calcul de E(X) :

$$E(X) = E[\sum X_i] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

Calcul de V(X) :

$$V(X) = V[\sum X_i] = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

Les variables $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ sont indépendantes puisqu'elles sont le résultat des tirages avec remises. Donc :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$$

Calcul du mode :

$$P_x = C_n^x p^x q^{n-x}$$

$$\frac{P_{x-1}}{P_x} = \frac{C_n^{x-1} p^{x-1} q^{n-x+1}}{C_n^x p^x q^{n-x}} = \frac{\frac{n!}{(x-1)!\,(n-x+1)!}\ q}{\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\ p} = \frac{xq}{(n-x+1)p}$$

$$\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{(n-x)p}{(x+1)q}$$

Le mode est la valeur de la variable aléatoire X tel que :

$$\frac{x\,q}{(n-x+1)\,p} < 1 \qquad et \qquad \frac{(n-x)\,p}{(x+1)\,q} < 1$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$xq < (n-x+1)p \qquad \text{et} \qquad (n-x)p < (x+1)q$$

$$x < \frac{np+p}{p+q} \qquad \text{et} \qquad x > \frac{np-q}{p+q}$$

Donc le mode M_0 satisfait :

$$\frac{np-q}{p+q} < M_0 < \frac{np+p}{p+q} \Leftrightarrow np - q < M_0 < np + p$$

3.1.3 Loi hypergéométrique :

Soit un ensemble de N éléments ayant deux caractères A ou B. Soit N_1 le nombre d'éléments ayant le caractère A .Soit N_2 le nombre d'éléments ayant le caractère B. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de réalisations du caractère A après n tirages sans remise de l'élément tiré.

(Ici la probabilité p d'une issue n'est pas constante)

Alors $\qquad X \leadsto (N, n, N_1)$

$$P(X = k) = C_{N_1}^k \ C_{N_2}^{n-k} / C_N^n$$

$$D_X = \{\sup(0, n-N_2), \sup(0, n-N_2)+1, \dots \inf(n, N_1)\}$$

$$\mathrm{E(X) = \ n\,p\,;\ V(X) = n\,p\,q}\ \left[\frac{N-n}{N-1}\right]$$

Preuves : Voir Exercices série n°: 5

3.1.4 Loi de poisson :

Une variable aléatoire est dite suivre la loi de poisson de paramètre λ si :

$$\mathrm{P(X = k)}\ = e^{-\lambda}\,\lambda^{k}\ /\ \mathrm{k}\,!$$

$\mathrm{D_X} = \{0,1,2, \dots, \mathrm{n}, \dots\}$ « Ensemble infini dénombrable »

On écrit X ↝ P(λ) ;

On montre que E(X) =V(X)= λ

Preuves :

Calcul de E(X) :

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} \mathrm{k}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}\,!} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^{\mathrm{k-1}}\,\lambda}{(\mathrm{k}-1)!} = \lambda \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^{\mathrm{k-1}}}{(\mathrm{k}-1)!}$$

$$\text{Si on pose x} = \mathrm{k} - 1 \text{ on a: } \mathrm{E(X)} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{\mathrm{x=0}}^{\infty} \frac{\lambda^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}!}$$

$$\mathrm{E(X)} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda} = \ \lambda$$

Calcul de V(X) :

$$\mathrm{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

$$\mathrm{E(X^2) = E[X(X-1) + X] = E[X(X-1)] + E(X)}$$

$$\mathrm{E[X(X-1)]} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} \big(\mathrm{k(k-1)}\big)\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} \mathrm{k(k-1)}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^{\mathrm{k-2}}\lambda^{2}}{\mathrm{k}!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^{2} \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} \frac{\lambda^{\mathrm{k-2}}}{(\mathrm{k}-2)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^{2} \sum_{\mathrm{k=2}}^{\infty} \frac{\lambda^{\mathrm{k-2}}}{(\mathrm{k}-2)!}$$

On pose x=k-2 ;

$$E[X(X-1)] = e^{-\lambda}\,\lambda^2 \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2$$

Donc : $V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

3.2 Lois absolument continues :

3.2.1 Loi normale

Définition 1 :

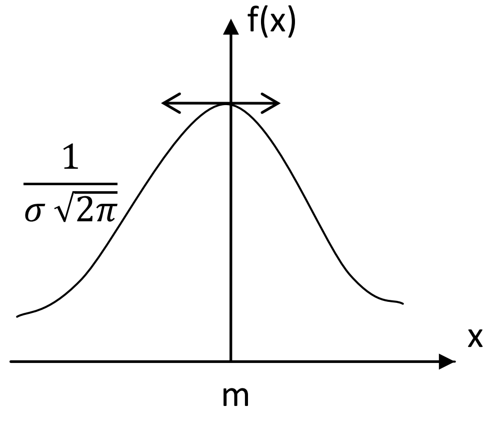
Une variable aléatoire X absolument continue suit une loi normale d'espérance E(X) =m et d'écart type σ si :

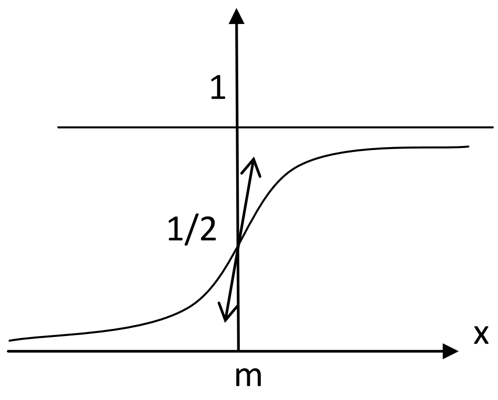
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \;\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]$$

$D_X = IR;\; m \in IR\,;\; \sigma \in IR^+$

On note: $X \sim N\,(m\,, \sigma)$

Représentation graphique:





La courbe de f(x) admet un maximum (=mode) au point d'abscisse E(X)=m	La courbe de π(t) admet un point d'inflexion de coordonnées (0, ½) abscisse E(X)=m

Définition 2 :

Si $\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{X-m}}{\sigma}$ alors Y est appelé la loi normale centrée réduite.

On note Y $\rightsquigarrow$ N(0,1)

On montre que :

$$E(Y)= 0 \; ; \quad V(Y) =1 \quad \text{et} \quad \mathrm{h(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

Preuves :

$$\mathrm{E(Y)} = \mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\ (\,\mathrm{E(X)} - \mathrm{E(m)}\,) = \frac{1}{\sigma}\ (\mathrm{m-m}) = 0$$

$$\mathrm{V(Y)} = \mathrm{V}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\ \mathrm{V(X-m)} = \frac{1}{\sigma^2}\ \mathrm{V(X)} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Pour déduire la densité de Y nous allons utiliser le théorème déjà énoncé.

Puisque $\mathrm{Y} = \mathrm{g(X)} = \frac{1}{\sigma}\mathrm{X} - \frac{m}{\sigma}$ est une fonction affine et donc g est bijective

Alors :

$$\mathrm{h(y)} = \mathrm{f}\,(g^{-1}\,(y)) \left|\frac{dg^{-1}\,(y)}{dy}\right| \; ; \; g^{-1}(\mathrm{y}) = \sigma\, y + m \; ; \; \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \sigma$$

$$\mathrm{h(y)} = \mathrm{f}(\sigma y + m)|\sigma| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \exp\left[-\frac{1}{2}(\frac{\sigma y + m - m}{\sigma})^2\right]|\sigma|$$

$$|\sigma| = \sigma \quad \text{d'où} \quad \mathrm{h(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \exp -\frac{y^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Il reste maintenant à montrer que h(y) est bien une densité de probabilité, c'est-à-dire que h(y) vérifie bien les propriétés d'une fonction de densité de probabilité que nous avons déjà énoncés.

1-Puisque $e^{-\frac{y^2}{2}} > 0,0 \;\; \forall y \epsilon \;\; \mathrm{IR}\; alors \;\; \mathrm{h(y)} > 0 \;\; \forall y \epsilon\, D_y = \mathrm{IR}$

2-Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,\mathrm{d}\,\mathrm{y} = 1$

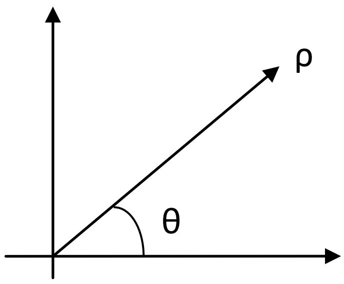
Preuve :

Soit $\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{h}(\mathrm{y})\,\mathrm{dy}$ et calculons I² :

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2+t^2)}\,dtdy$$

Effectuons un changement de variable :

$$\begin{cases} t = \rho\cos\theta = f_1(\rho,\theta) \\ y \equiv \rho\sin\theta = f_2(\rho,\theta) \end{cases}$$



(ρ,θ) est appelé système de coordonnées polaires.

Rappelons que : si $\mathcal{J}_f$ désigne le jacobien de la fonction f, c'est-à-dire la matrice des dérivés partielles de f on a :

$$\boldsymbol{\iint_{\mathrm{f(U)}} \mathrm{g(t,y)\,dy\,dt} = \iint_{\mathrm{U}} \mathrm{g}\big(\mathrm{f}(\rho,\theta)\big)\left|\det \mathcal{J}_{\mathrm{f}(\rho,\theta)}\right| \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}$$

$$= \iint \mathrm{g}(\mathrm{f}_1(\rho,\theta),\ \mathrm{f}_2(\rho,\theta)\left|\det \mathcal{J}_{\mathrm{f}(\mathrm{p},\theta)}\right|\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$\text{ici}\ \begin{cases} \mathrm{U} = [0{,}2\pi]\times[0,+\infty[\,;\mathrm{f(U)} = \mathrm{IR}\times\mathrm{IR} \\ \mathrm{f}(\rho,\theta) = \big(\mathrm{f}_1(\rho,\theta),\ \mathrm{f}_2(\rho,\theta)\big) = (\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) \\ \mathrm{g(t,y)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\mathrm{t}^2+\mathrm{y}^2)} \end{cases}$$

$$\det\mathcal{J}_f\ (\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho(cos^2\theta + sin^2\theta) = \rho$$

$$\mathrm{I}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\left[\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}}\ \rho\mathrm{d}\rho\ \right] = 1 \text{ d'où } \mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{h(y)}\quad\mathrm{dy} = 1$$

1- h(y) est continue car elle est une fonction composée de deux fonctions continues.

(Ici la fonction $z = \frac{y^2}{2}$ est continue et la fonction e^{-z} est continue)

Fonction de répartition :

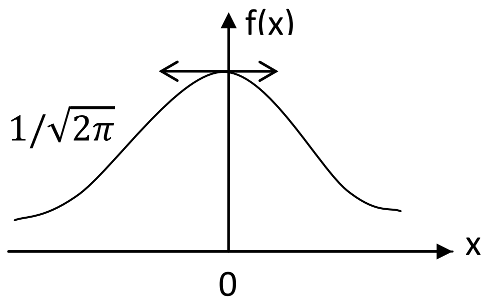
La fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée réduite X$\sim N(0,1)$ est donnée par $\mathrm{F(t)} = \pi(t)$ avec

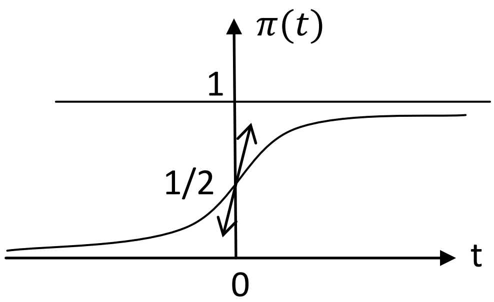
$$\pi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\pi(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

$$(\text{car } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{est une densité de probabilité})$$

Représentation graphique :





La courbe de f(x) admet un maximum (=mode) au point d'abscisse E(X)=0	La courbe de π(t) admet un point d'inflexion de coordonnées (0, ½)

Propriété : π (-t) = 1 - π (t)

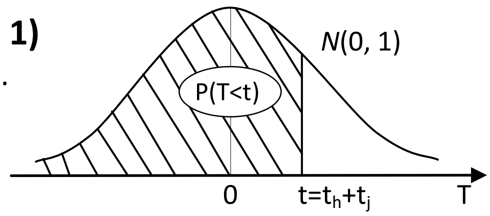
Utilisation de la table de la Loi Normale N(0, 1)

Fonction de répartition π de la loi normale centrée réduite.

Probabilité de trouver une valeur inférieure à t .

t positif connu ($t = t_h + t_j$) ⟹ recherche de P(T<t)=π(t)

π (-t) = 1 - π (t)



h \ j	t_j 0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5039	0.5079	0.5119	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5318	0.5358
0.1	0.5398	0.5438	0.5477	0.5517	0.5556	0.5596	0.5635	0.5674	0.5714	0.5753
0.2	0.5792	0.5831	0.587	0.5909	0.5948	0.5987	0.6025	0.6064	0.6102	0.6140
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6330	0.6368	0.6405	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6843	0.6879
0.5	0.6914	0.6949	0.6984	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7290	0.7323	0.7356	0.7389	0.7421	0.7453	0.7485	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7733	0.7763	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7938	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8105	0.8132
0.9	0.8159	0.8185	0.8212	0.8238	0.8263	0.8289	0.8314	0.8339	0.8364	0.8389
1.0	0.8413	0.8437	0.8461	0.8484	0.8508	0.8531	0.8554	0.8576	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8707	0.8728	0.8749	0.8769	0.8790	0.8810	0.8829
1.2	0.8849	0.8868	0.8887	0.8906	0.8925	0.8943	0.8961	0.8979	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9065	0.9082	0.9098	0.9114	0.9130	0.9146	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9250	0.9264	0.9278	0.9292	0.9305	0.9318
t_h 1.5	0.9331	0.9344	0.9357	0.9369	0.9382	0.9394	0.9406	0.9417	0.9429	0.9440
1.6	0.9452	0.9463	0.9473	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9544
1.7	0.9554	0.9563	0.9572	0.9581	0.9590	0.9599	0.9608	0.9616	0.9624	0.9632
1.8	0.9640	0.9648	0.9656	0.9663	0.9671	0.9678	0.9685	0.9692	0.9699	0.9706
1.9	0.9712	0.9719	0.9725	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9755	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9777	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9807	0.9812	0.9816
2.1	0.9821	0.9825	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9853	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9867	0.9871	0.9874	0.9877	0.9880	0.9884	0.9887	0.9889
2.3	0.9892	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9908	0.9911	0.9913	0.9915
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9937	0.9939	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9947	0.9949	0.9950	0.9952
2.6	0.9953	0.9954	0.9956	0.9957	0.9958	0.9959	0.9960	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9972	0.9973
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9976	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980
2.9	0.9981	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986
3.0	0.9986	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9990

Table pour les grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
π(t)	0,9986	0,9990	0,9993	0,9995	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999

<u>Pour t ≥ 0 :</u>

- Si $0 \leq t \leq 4.5$: la table donne les valeurs de $\pi(t)$.
- Si $t > 4.5$: on utilise l'approximation $\pi(t) \approx 1$.

<u>Exemple :</u> $t = 1.51 = 1.5 + 0.01 = t_h + t_j$. La table donne π (1.51)=0.9344

<u>Pour t < 0 :</u>

La table ne donne pas directement les valeurs de $\pi(t)$. Il faut utiliser la propriété $\pi(-t) = 1 - \pi(t)$.

<u>Exemple :</u> t=-1 ; $\pi(-1) = 1 - \pi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

3.2.2 La loi gamma (γ) :

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi gamma de paramètre a si sa densité de probabilité s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(a)} \quad e^{-x} x^{a-1}; & \text{si } x \geq 0, \quad a > 0 \end{cases}$$

$\Gamma(a)$ désigne la fonction gamma définit par

$$\Gamma\,(\mathrm{a}) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \; x^{a-1} \;\mathrm{dx}$$

Propriétés de $\boldsymbol{\Gamma}$:

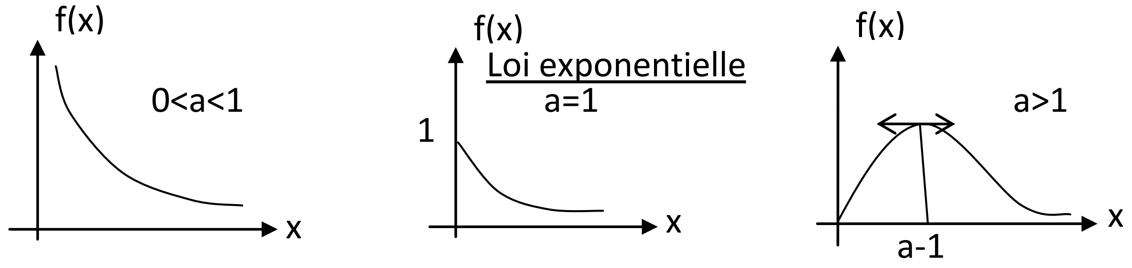
1- $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a) \qquad \text{pour a } > 0$

2- $\Gamma(1) = 1$

3- $\Gamma(n+1) = n! \qquad \text{pour n } \epsilon\ IN$

4- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Forme de la densité



Les moments d'une $\gamma(\mathbf{a})$

1- **moment non centré d'ordre n :**

$$E(X^n) = \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)} = \mathrm{a}(\mathrm{a}+1) \times \ldots \times (\mathrm{n}+\mathrm{a}-2)(\mathrm{n}+\mathrm{a}-1)$$

2- **L'espérance:**

$$E(X) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \frac{a\Gamma(a)}{\Gamma(a)} = \mathrm{a}$$

3- **La variance :**

$$\mathrm{V(X)} = \mathrm{a} \quad (\text{car } \mathrm{E}(X^2) - (E(X))^2 = \mathrm{a}(\mathrm{a}+1) - a^2 = \mathrm{a})$$

Théorème :

Soient $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{n}$ n variables aléatoires indépendantes et suivants chacune une loi $\gamma(\mathrm{a}_\mathrm{i})$ c'est-à-dire que :

$X_1 \sim \gamma(\mathrm{a}_1)$, $X_2 \sim \gamma(\mathrm{a}_2)$, …, $X_n \sim \gamma(\mathrm{a}_\mathrm{n})$

Alors nous montrons que :

$$\mathrm{Z} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \gamma\left(\sum_i^n a_i\right)$$

Corollaire (conséquence) :

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_n$, n variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes et soient $U_1, U_2, \ldots, U_n$ n variables aléatoires telles que $U_i = \frac{T_i^2}{2}$ nous pouvons montrer que :

1- $U_i \sim \gamma(1/2) \quad \forall\, \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$
2- Les variables $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sont indépendantes
3- $\mathrm{Z} = U_1 + U_2 + \cdots + U_n \sim \gamma(n/2)$

Preuve :

1) $X = \frac{T}{\sqrt{2}}$; $T = g^{-1}(X) = \sqrt{2}\,X$

   T variable aléatoire centrée réduite de densité $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

$$h(x) = f(g^{-1}(x)) \left|\frac{dg^{-1}(x)}{dx}\right| = f(\sqrt{2}\,x)\,\frac{d\sqrt{2}\,x}{dx}$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\sqrt{2}\ x)^2}{2}}.\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}$$

Transformation: on pose U= X^2

$$g(u) = \frac{h(\sqrt{u}) + h(-\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} = \frac{h(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}$$

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ e^{-u}\ u^{-\frac{1}{2}} \text{ d'où } U_i \ \backsim\ \gamma\left(\frac{1}{2}\right)\quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2) Nous avons déjà donné une propriété sur l'indépendance permettant d'établir l'indépendance entre les variables $U_1, U_2, \dots, U_n$
3) Soit $Z = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

$U_i \backsim \gamma(1/2)$ et les U_i sont indépendantes i=1, 2, …, n alors $Z \backsim \gamma(n/2)$

(Voir théorème plus haut)

$$\text{D'où } f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-z}\, z^{\frac{n}{2}-1} & si\ z \geq 0\ et\ n\ entier > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Faisons le changement de variable Y= 2Z ; $g^{-1}(y) = z = \frac{y}{2}$

$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{2};\ h(y) = f(g^{-1}(y)) \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$$

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{y}{2}} \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \dfrac{1}{2} & \text{si } y \geq 0\ \ et\ n > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\ \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} & \text{si } y \geq 0 \quad et\ n > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

La densité obtenue est celle d'une variable qui suit une loi χ_n^2 .

3.2.3 Loi de χ_n^2 (Loi de k Pearson) :

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire Y suit une loi de χ_n^2 si Y est la somme de n variables aléatoires normales, centrées réduites, indépendantes au carré.

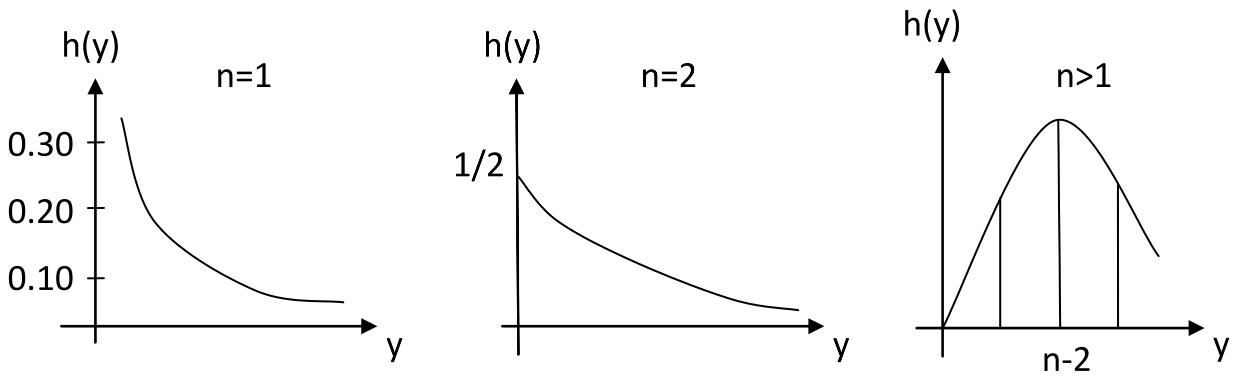
On note $Y \sim \chi_n^2$ et se lit Y suit la loi de **khi deux** à n degrés de liberté.

n est le nombre de variables aléatoires indépendantes composant Y .S'il existe une relation linéaire liant les variables composant Y alors le nombre de degrés de liberté est égal à n-1. S'il existe k relations linéaires entre les variables composant Y alors le degré de liberté est égal à n-k.[1]

La densité :

$$\text{Si } Y \sim \chi_n^2 \text{ alors } h(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\ (\frac{n}{2})}\ e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} & si\ y \geq 0\ et\ n > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Forme de la densité :



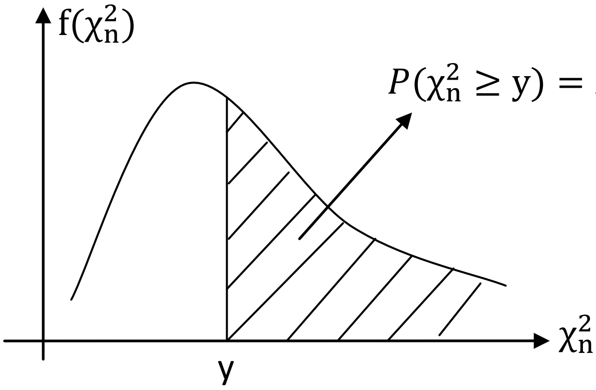
L'espérance : $E(\chi_n^2) = n$

La variance : $V(\chi_n^2) = 2n$

[1] - cf. B.GRAIS, Méthodes statistiques, Dunod

Utilisation de la table de χ_n^2 :

<u>1^{er} Cas :</u> Si $n \leq 30$, la table donne pour une probabilité λ et une valeur de n la valeur y de χ_n^2 telle que : $P(\chi_n^2 \geq y) = \lambda$



Exemple :

$$\left.\begin{matrix} \lambda = 0{,}90 \\ n = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P(\chi_3^2 \geq y) = 0{,}90 \;\Rightarrow y = 0{,}58\ (voir\ table)$$

<u>$2^{ème}$ Cas :</u> Si $30 < n \leq 100$

On admet que $\sqrt{2\,\chi_n^2} - \sqrt{2n-1} \;\underline{\backsim}\; N(m = 0,\ \sigma = 1\,)$

Le signe $\underline{\backsim}$ signifie "est approximativement" ou "converge en loi".

Donc dans ce cas là on utilise la table de la loi Normale pour calculer par exemple y tel que $P(\chi_n^2 \geq y) = 0{,}90$

<u>$3^{ème}$ cas :</u> Si $n > 100$

On admet que :

$$\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} \simeq N(0,1)$$

Donc on utilise la table de la loi normale pour le calcul.

Propriétés

1) soit Z une variable aléatoire on a :

$$Z \backsim \gamma(\frac{n}{2}) \Leftrightarrow Y = 2Z \backsim \chi_n^2$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} si\ Y_1 \sim \chi^2_{\mathrm{n}_1} \\ si\ Y_2 \sim \chi^2_{\mathrm{n}_2} \\ si\ Y_1\ et\ Y_2\ sont\ indépendantes \end{array}\right\} \text{alors } Y_1 + Y_2 \sim \chi^2_{n_1+n_2}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} si\ Y_1 \sim \chi^2_{\mathrm{n}_1} \\ si\ Y_2 \sim \chi^2_{\mathrm{n}_2} \\ si\ Y_1 + Y_2 \sim \chi^2_{n_1+n_2} \end{array}\right\} \text{alors } Y_1 \text{ et } Y_2\ sont\ indépendantes$$

4)

$$\left.\begin{array}{l} si\ Y_1 \sim \chi^2_{\mathrm{n}_1} \\ si\ Y_1 + Y_2 \sim \chi^2_{n_1+n_2} \end{array}\right\} \text{alors } Y_2 \sim \chi^2_{n_2}$$

<u>Remarque :</u>

On remarque que la courbe de la densité de χ^2_{n} est dissymétrique vers la droite.

Mais on montre que plus le nombre de degrés de liberté est élevé, plus cette dissymétrie est faible.

A La limite pour $n \longrightarrow +\infty$, la densité de χ^2_{n} est semblable à celle de la loi normale d'espérance n et d'écart type $\sqrt{2n}$

3.2.4 La loi de Fisher–Snedecor :

Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que :

$\mathrm{X} \sim \chi^2_{\mathrm{n}}$ et $\mathrm{Y} \sim \chi^2_{\mathrm{m}}$ alors la variable $\mathrm{U} = \frac{\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{n}}}{\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{m}}}$ suit la loi de Fisher – Snedecor à n et m degrés de liberté.

On note U $\sim$ F (n, m)

La densité :

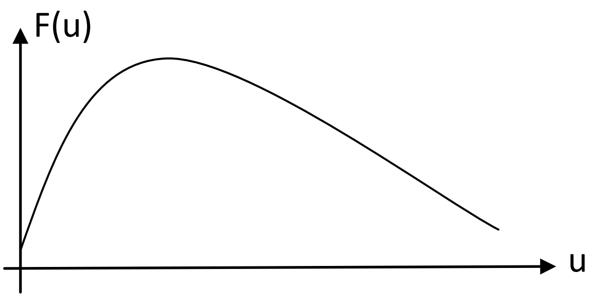
$$U \rightsquigarrow F(n,m); \quad f(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\frac{n}{2},\frac{m}{2})} n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} \dfrac{u^{\frac{n}{2}-1}}{(m+nu)^{\frac{n+m}{2}}} & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec :

$$B(\frac{n}{2},\frac{m}{2}) = \int_0^1 x^{\frac{n}{2}-1}(1-x)^{\frac{m}{2}-1}dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{m}{2})}$$

B(a, b) est appelé fonction eulérienne de première espèce (ou tout simplement fonction Beta)

La forme de la densité :



Moments :

$$E(U) = \frac{m}{m-2} \quad \text{pour } m > 2$$

$$V(U) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-4)(m-2)^2} \quad \text{pour } m > 4$$

Utilisation de la table de Fisher –Snedecor :

La table donne pour une valeur de n, une valeur de m et une valeur de p la valeur a telle que : $P(U \geq a) = p$.

<u>Exemple :</u>

$$\left.\begin{array}{r} pour\ n = 1; \quad m = 5 \\ p = 0{,}05 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 6{,}61 \quad (\text{voir table})$$

3.2.5 Loi de Student :

Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que :

$X \leadsto N(0,1)$ et $Y \leadsto \chi^2_n$

On appelle Loi de Student à n degrés de liberté la loi suivie par le rapport

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

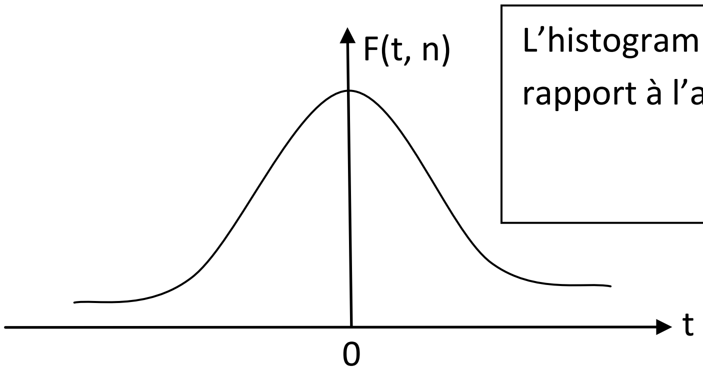
$$\text{On note } T \leadsto St_n \; ; \; f(t,n) = \frac{1}{\sqrt{n}\, B(\frac{1}{2},\frac{n}{2})} \, (1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{(n+1)}{2}}$$

$$D_T = \text{IR} \quad \text{et n entier} \geq 1$$

On rappelle que :

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} \, (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \; ; \; a > 0 \; et \; b > 0$$

Forme de la densité :



L'histogramme est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

$$T \leadsto St_n$$

Les moments :

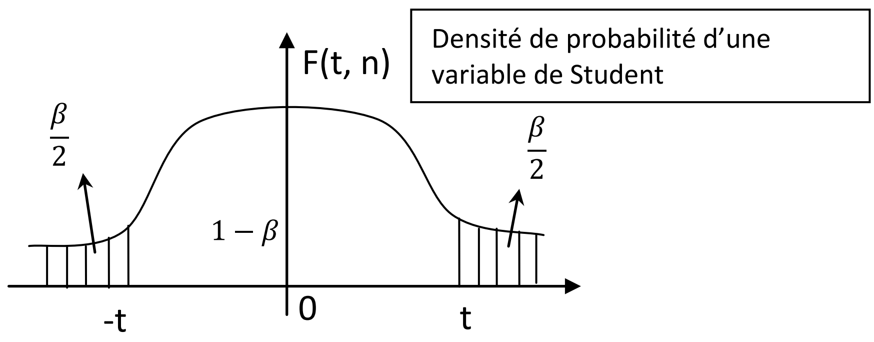
$$E(T) = 0; \; V(T) = \frac{n}{n-2} \; si \; n \geq 3$$

Remarque : la variance d'une Student n'existe que pour n ≥3.

Utilisation de la table de Student :

La table de la loi Student donne pour une valeur de degré de liberté n et pour une probabilité β la valeur t telle que :

$$P(-t < T < t) = 1 - \beta \iff P[|T| > t] = \beta$$



Exemple : La table donne pour β=0.90 et n=5 la valeur $t = 0.132$